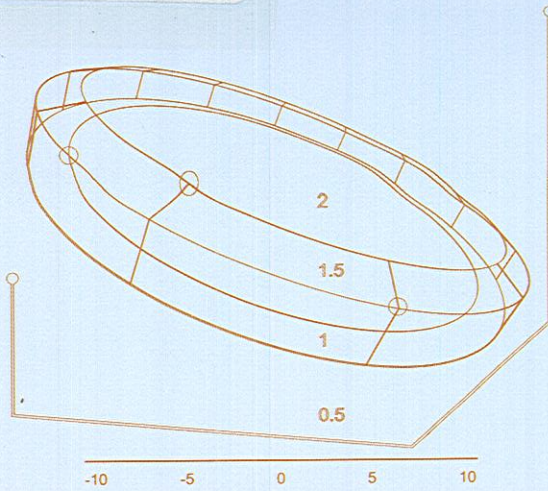


X2.233

GS.TS LÊ THỌ TRÌNH

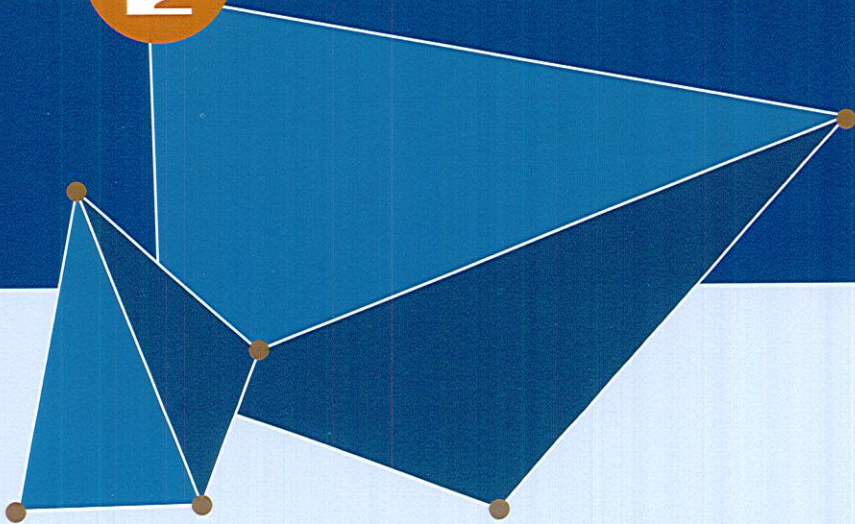


# CƠ HỌC KẾT CẤU

Tập

2

HỆ SIÊU TĨNH



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT



THƯ VIỆN

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ





**THƯ VIỆN  
HUBT**

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

GS. TS. LÊU THỌ TRÌNH

# CƠ HỌC KẾT CẤU

TẬP II

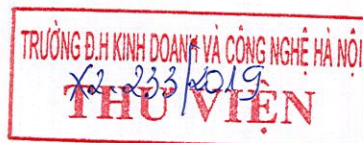
## Hệ siêu tĩnh

(Tái bản lần thứ 3)



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

HÀ NỘI - 2014





**THƯ VIỆN  
HUBT**

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ



# 5 Phương pháp lực và cách tính hệ phẳng siêu tĩnh

## 5.1. Khái niệm về hệ siêu tĩnh - Bậc siêu tĩnh

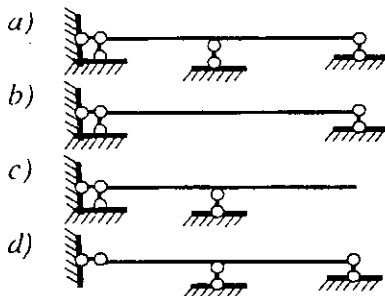
### A. Định nghĩa

Trong tập I đã giới thiệu cách tính hệ tĩnh định tức là những hệ trong đó chỉ cần dùng các phương trình cân bằng tĩnh học cũng đủ để xác định phản lực và nội lực. Trên thực tế, thường gặp những hệ trong đó nếu chỉ sử dụng các phương trình cân bằng tĩnh học không thôi thì chưa đủ để xác định các phản lực và nội lực. Để tính các hệ đó cần bổ sung các phương trình biểu thị điều kiện biến dạng. Như vậy:

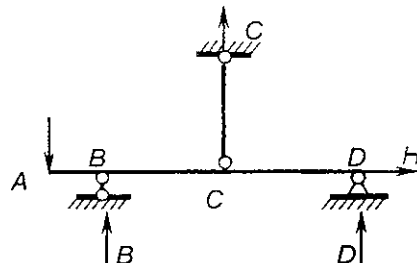
*Hệ được gọi là siêu tĩnh nếu trong toàn hệ hoặc trong một vài phần của hệ ta không thể chỉ dùng các phương trình cân bằng tĩnh học để xác định tất cả các phản lực và nội lực.*

*Hệ siêu tĩnh là hệ bất biến hình và có liên kết thừa.*

Danh từ liên kết thừa dùng ở đây chỉ là quy ước. Căn hiệu liên kết thừa là những liên kết không cần thiết cho sự cấu tạo hình học của hệ nhưng vẫn cần cho sự làm việc của công trình.



Hình 5.1



Hình 5.2

Ví dụ, dầm hai nhịp trên hình 5.1a có bốn liên kết loại một nhưng ta chỉ có ba phương trình cân bằng tĩnh học nên chưa đủ để xác định bốn phản

lực trong bốn liên kết, vậy dầm đó là siêu tĩnh. Dầm này có một liên kết thừa là một trong ba liên kết thanh thẳng đứng. Nếu loại một liên kết thừa như trên các hình 5.1b, c, d thì dầm vẫn bất biến hình nhưng tính chất làm việc sẽ khác đi.

Đối với hệ cho trên hình 5.2 ta thấy: phần dầm thừa  $AB$  là tĩnh định vì có thể chỉ dùng các phương trình cân bằng tĩnh học cũng đủ để xác định nội lực trong đó; phần  $BCD$  là siêu tĩnh vì với ba phương trình cân bằng tĩnh học chưa đủ để xác định bốn phản lực  $B, C, D$  và  $H$ , do đó cũng không xác định được nội lực trong phần này. Vậy, nếu xét toàn bộ thì hệ này là siêu tĩnh.

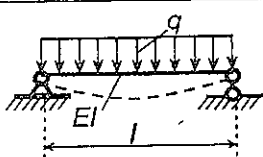
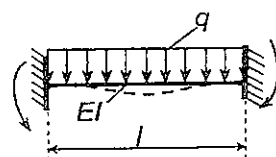
### B. Tính chất

Đối chiếu với hệ tĩnh định, hệ siêu tĩnh có những tính chất sau:

- 1) Chuyển vị, biến dạng và nội lực trong hệ siêu tĩnh nói chung nhỏ hơn trong hệ tĩnh định có cùng kích thước và tải trọng.

Bảng 5.1 cung cấp kết quả tính độ võng ở giữa nhịp và mômen uốn lớn nhất trong dầm tĩnh định một nhịp với dầm siêu tĩnh một nhịp có hai đầu ngàm.

Bảng 5.1

Dầm		
Độ võng ở giữa nhịp	$y_{max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$	$y_{max} = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EI}$
Giá trị mômen uốn lớn nhất	tại giữa nhịp $M = \frac{ql^2}{8}$	tại ngàm $M = \frac{ql^2}{12}$

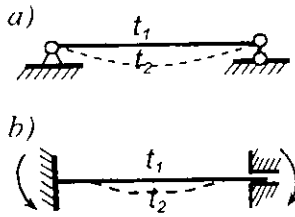
Qua những số liệu trên ta thấy chuyển vị và nội lực trong dầm siêu tĩnh nhỏ hơn trong dầm tĩnh định khá nhiều. Bởi vậy dùng hệ siêu tĩnh sẽ tiết kiệm được vật liệu hơn so với hệ tĩnh định tương ứng. Đó là ưu điểm chính của hệ siêu tĩnh.

- 2) Trong hệ siêu tĩnh phát sinh các nội lực do sự thay đổi nhiệt độ, sự chuyển vị các gối tựa, sự chế tạo và lắp ráp không chính xác gây ra.

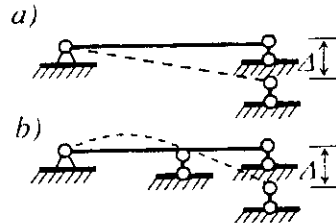


Để thấy rõ tính chất này, ta xét một vài ví dụ:

- So sánh dầm tĩnh định một nhịp (hình 5.3a) với dầm siêu tĩnh một nhịp (hình 5.3b) cùng chịu sự thay đổi nhiệt độ không đều, ở trên là  $t_1$ , ở dưới là  $t_2$  với  $t_2 > t_1$  ta thấy: dưới tác dụng của nhiệt độ, dầm có khuynh hướng bị uốn cong, nhưng trong dầm tĩnh định các liên kết không ngăn cản biến dạng của dầm nên không phát sinh phản lực và nội lực, ngược lại trong dầm siêu tĩnh, các liên kết (ngàm) cản trở không cho phép dầm biến dạng tự do, do đó phát sinh phản lực và nội lực.



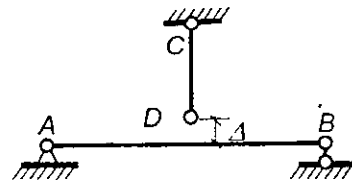
Hình 5.3



Hình 5.4

- Khi liên kết có chuyển vị cưỡng bức (bị lún) dầm tĩnh định cho trên hình 5.4a bị nghiêng đi, các liên kết không ngăn cản và cho phép chuyển vị tự do nên không phát sinh nội lực. Ngược lại, khi gối phải của dầm siêu tĩnh trên hình 5.4b bị lún, gối tựa giữa không cho phép dầm chuyển vị tự do như trường hợp trên, dầm bị uốn cong theo đường đứt nét, do đó trong dầm sẽ phát sinh nội lực.

- Khi chế tạo, giả sử chiều dài của thanh  $CD$  trong hệ siêu tĩnh trên hình 5.5 bị ngắn so với chiều dài thiết kế một đoạn bằng  $\Delta$ . Sau khi lắp ráp, thanh  $CD$  bị dãn ra đồng thời dầm  $AB$  cũng bị uốn cong, do đó trong hệ tồn tại các nội lực ban đầu.



Hình 5.5

Khi thiết kế kết cấu siêu tĩnh ta cần đặc biệt lưu ý đến những nguyên nhân gây ra nội lực kể trên. Đôi khi có thể sử dụng tính chất này để tạo sẵn trong hệ những nội lực và biến dạng ban đầu ngược chiều với nội lực và biến dạng do tải trọng gây ra. Biện pháp này làm cho sự phân phối nội lực trong các cấu kiện của công trình được hợp lý hơn và do đó tiết kiệm được vật liệu.

3) Nội lực trong hệ siêu tĩnh phụ thuộc vật liệu và kích thước của tiết diện trong các thanh.

Như sau này sẽ thấy, để tính hệ siêu tĩnh ta phải dựa vào điều kiện biến dạng mà biến dạng lại phụ thuộc các độ cứng  $EI$ ,  $EA$ ... nên nội lực trong hệ siêu tĩnh cũng phụ thuộc  $EI$ ,  $EA$  của các thanh.

Tính các hệ siêu tĩnh thường phức tạp hơn tính các hệ tĩnh định. Có nhiều phương pháp tính hệ siêu tĩnh. Hai phương pháp cơ bản là:

- \* Phương pháp lực (được đề cập trong chương này).
- \* Phương pháp chuyển vị (được đề cập trong chương 6).

### C. Bậc siêu tĩnh

Trong phạm vi những giả thiết được chấp nhận trong cơ học kết cấu, ta có thể định nghĩa bậc siêu tĩnh như sau:

*Bậc siêu tĩnh của hệ siêu tĩnh bằng số liên kết tương đương loại một ngoài số liên kết cần thiết để cho hệ bất biến hình.*

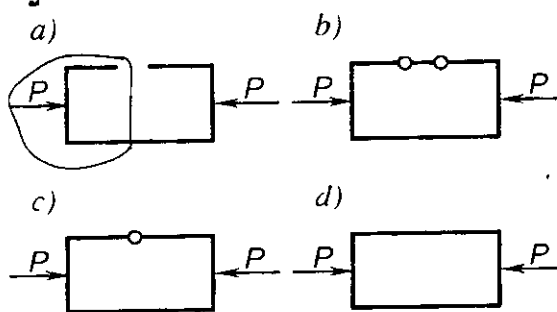
Ta có thể dùng các công thức (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) liên hệ giữa số lượng các miếng cứng và số lượng các liên kết đã nghiên cứu trong chương 1 để suy ra bậc siêu tĩnh của hệ. Ví dụ, từ (1.3) ta suy ra công thức xác định bậc siêu tĩnh  $n$  của hệ nối với trái đất là

$$n = T + 2K + 3H + C - 3D,$$

trong đó  $D$  – số các miếng cứng tĩnh định (miếng cứng có chu vi hở).

Ngoài ra còn có thể thiết lập công thức đơn giản hơn để xác định bậc siêu tĩnh.

Trước khi thiết lập ta khảo sát một ví dụ. Xét một khung cố chu vi hở (hình 5.6a). Khung này là tĩnh định, vì ta có thể chỉ sử dụng các phương trình cân bằng tĩnh học để xác định nội lực tại một tiết diện bất kỳ sau khi thực hiện mặt cắt như trên hình vẽ.



Hình 5.6

Nếu đặt thêm vào chu vi hở đó một liên kết loại một (thanh), hệ sẽ thừa



một liên kết (hình 5.6b). Vậy hệ này có bậc siêu tĩnh bằng một.

Nếu đặt thêm vào chu vi hở đó một liên kết loại hai (khớp) hệ sẽ thừa hai liên kết tương đương loại một (hình 5.6c). Vậy hệ này có bậc siêu tĩnh bằng hai.

Nếu đặt thêm vào chu vi hở đó một mối hàn (liên kết loại ba) hệ sẽ thừa ba liên kết tương đương loại một (hình 5.6d). Vậy hệ này có bậc siêu tĩnh bằng ba.

Qua ví dụ trên ta có kết luận sau:

*Một chu vi kín có bậc siêu tĩnh bằng ba, nếu thêm vào chu vi kín đó một khớp đơn giản thì bậc siêu tĩnh giảm xuống một đơn vị.*

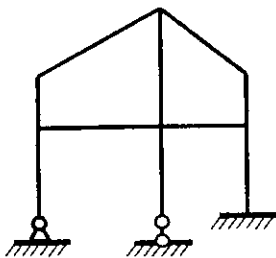
Để thiết lập công thức xác định bậc siêu tĩnh, ta giả thiết trong hệ siêu tĩnh có  $V$  chu vi kín và  $K$  khớp đơn giản.

Theo nhận xét trên, cứ mỗi chu vi kín có bậc siêu tĩnh bằng ba nên hệ có  $V$  chu vi kín sẽ có bậc siêu tĩnh là  $3V$ . Nếu thêm một khớp đơn giản thì bậc siêu tĩnh giảm xuống một đơn vị, do đó  $K$  khớp đơn giản làm bậc siêu tĩnh của hệ giảm  $K$  đơn vị. Vậy bậc siêu tĩnh  $n$  của hệ được xác định theo công thức:

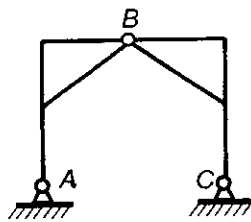
$$n = 3V - K. \quad (5.1)$$

**Ví dụ 5.1.** Tìm bậc siêu tĩnh của hệ trên hình 5.7.

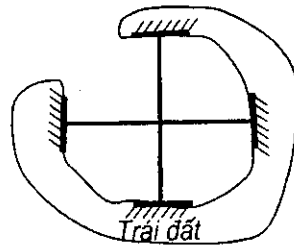
Hệ này có  $V = 4$  và  $K = 3$ . Do đó  $n = 3 \cdot 4 - 3 = 9$ .



Hình 5.7



Hình 5.8



Hình 5.9

**Ví dụ 5.2.** Tìm bậc siêu tĩnh của hệ trên hình 5.8.

Hệ này có ba chu vi kín. Để tính số khớp  $K$  ta cần chú ý: các khớp  $A, C$  là khớp đơn giản nên mỗi khớp tính bằng một đơn vị; khớp  $B$  là khớp phức tạp nên phải tính bằng độ phức tạp của nó và bằng  $4 - 1 = 3$ . Vậy tổng số khớp đơn giản là  $K = 5$ . Bậc siêu tĩnh  $n = 3 \cdot 3 - 5 = 4$ .

**Chú thích:** Khi sử dụng công thức (5.1) cần quan niệm trái đất là miếng cứng hờ. Ví dụ, khi xét hệ trên hình 5.9 thì số chu vi kín trong trường hợp này bằng 3 chứ không phải bằng 4 vì phải quan niệm trái đất là miếng cứng hờ như trên hình vẽ. Bậc siêu tĩnh của hệ này bằng  $n = 3.3 - 0 = 9$ .

## 5.2. Nội dung phương pháp lực và cách tính hệ siêu tĩnh chịu các nguyên nhân: tải trọng bất động, thay đổi nhiệt độ, cấu tạo chiều dài không chính xác, chuyển vị gối tựa

### A. Nội dung phương pháp lực

Để tính hệ siêu tĩnh, ta không tính trực tiếp trên hệ đó mà tính trên một hệ thay thế khác cho phép dễ dàng xác định nội lực. Hệ thay thế này suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho bằng cách loại bớt các liên kết thừa gọi là *hệ cơ bản*. Tất nhiên, để bảo đảm cho hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh đã cho ta cần phải bổ sung thêm các điều kiện phụ. Đó là nội dung tóm tắt của *phương pháp lực*.

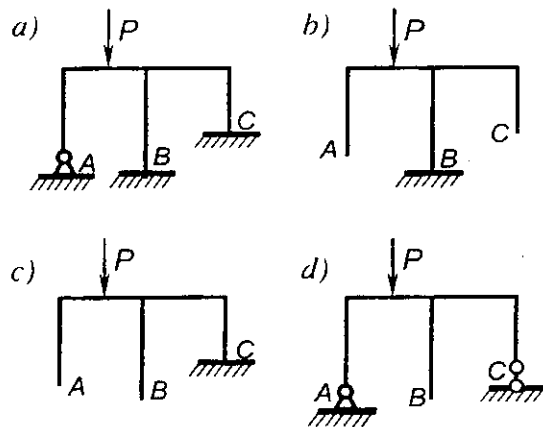
*Hệ cơ bản của phương pháp lực phải là hệ bất biến hình suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho bằng cách loại bỏ tất cả hay một số liên kết thừa.*

Nếu loại bỏ tất cả các liên kết thừa thì hệ cơ bản là tĩnh định còn nếu chỉ loại bỏ một số liên kết thừa thì hệ cơ bản là siêu tĩnh có bậc thấp hơn.

Điều quan trọng là *hệ cơ bản phải bất biến hình và cho phép ta xác định được nội lực một cách dễ dàng*. Bởi vậy trong đa số trường hợp, ta thường dùng hệ cơ bản tĩnh định.

Đối với hệ siêu tĩnh trên hình 5.10a, ta có thể chọn hệ cơ bản theo nhiều cách khác nhau. Trên hình 5.10b, c, d giới thiệu ba cách chọn hệ cơ bản tĩnh định cho hệ siêu tĩnh ở hình 5.10a.

Để thiết lập các điều kiện phụ ta cần so sánh sự khác nhau giữa hệ siêu tĩnh đã cho (hình 5.10a) với hệ cơ bản (giả sử



Hình 5.10



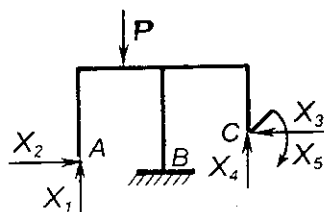
dùng hệ cơ bản 5.10b). Ta nhận thấy:

Tại các vị trí loại bỏ liên kết (A và C):

- trong hệ siêu tĩnh nói chung có các phản lực còn trong hệ cơ bản không có;
- trong hệ siêu tĩnh, chuyển vị theo phương của các liên kết bị loại bỏ đều bằng không; trong hệ cơ bản, các chuyển vị này có thể tồn tại.

Như vậy, muốn cho hệ cơ bản làm việc giống hệ đã cho, ta cần:

- Trong hệ cơ bản, đặt các lực  $X_1, X_2, \dots, X_n$  tương ứng với vị trí và phương của các liên kết bị loại bỏ. Những lực này chưa biết và giữ vai trò ẩn số (hình 5.11). Vì các ẩn số là lực (lực tập trung hoặc mômen tập trung) nên phương pháp này mang tên là *phương pháp lực*.



Hình 5.11

- Thiết lập điều kiện: chuyển vị trong hệ cơ bản tương ứng với vị trí và phương của các liên kết bị loại bỏ bằng không. Nói khác đi, chuyển vị trong hệ cơ bản tương ứng với vị trí và phương của ẩn số  $X_1, X_2, \dots, X_n$  do các lực  $X_1, X_2, \dots, X_n$  và do các nguyên nhân bên ngoài (tải trọng  $P$ , sự thay đổi nhiệt độ  $t$ , sự chế tạo chiều dài các thanh không chính xác  $\Delta$ , sự chuyển vị gối tựa  $Z$ ) gây ra phải bằng không.

Nếu hệ có bậc siêu tĩnh là  $n$  và hệ cơ bản tĩnh định thì ta có  $n$  điều kiện:

$$\Delta_{X_k}(X_1, X_2, \dots, X_k, \dots, X_n, P, t, \Delta, Z) = 0 \quad \text{với } k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.2)$$

Các điều kiện (5.2) là các *phương trình cơ bản của phương pháp lực*. Hệ phương trình này nghiệm đúng với tất cả các hệ tuân theo cũng như không tuân theo nguyên lý cộng tác dụng.

Với hệ có bậc siêu tĩnh là  $n$  ta thiết lập được  $n$  phương trình cơ bản đủ để xác định  $n$  ẩn số  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Sau khi tìm được các lực  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ta xem chúng như các ngoại lực tác dụng trên hệ cơ bản (hình 5.11). Lúc này các lực tác dụng trên hệ cơ bản đều đã biết, ta có thể dễ dàng tìm được nội lực và biến dạng trong hệ cơ bản, đó chính là nội lực và biến dạng trong hệ siêu tĩnh đã cho bởi vì các lực  $X_i$  đã thỏa mãn hệ phương trình cơ bản tức

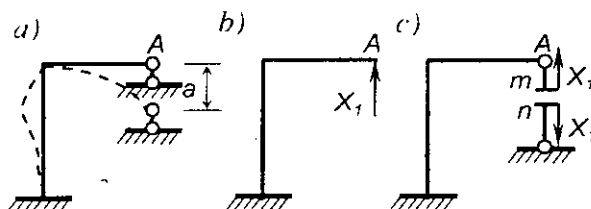
là đã thỏa mãn điều kiện làm việc như nhau giữa hệ cơ bản với hệ đã cho.

**Chú ý:**

1) Khi chọn hệ cơ bản cho hệ siêu tĩnh chịu các chuyển vị cưỡng bức  $Z$  tại các gối tựa ta cần chú ý:

- Đối với liên kết thừa không có chuyển vị cưỡng bức: có thể loại bỏ và thay thế bằng các lực  $X_k$ .
- Đối với liên kết thừa có chuyển vị cưỡng bức ta quy định: chỉ được phép cắt và thay thế bằng cặp lực  $X_k$  ngược chiều nhau mà không được phép loại bỏ.

Thật vậy, giả sử xét hệ siêu tĩnh cho trên hình 5.12a nếu chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ liên kết A có chuyển vị cưỡng bức (hình 5.12b) thì điều kiện biến dạng theo phương của ẩn số  $X_1$  sẽ khác không.



Hình 5.12

Lúc này chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của  $X_1$  do các ẩn số  $X$  và do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa gây ra sẽ có giá trị bằng chuyển vị cưỡng bức tương ứng

$$\Delta_{X_1(X_1, X_2, \dots, X_n, Z)} = -a \neq 0.$$

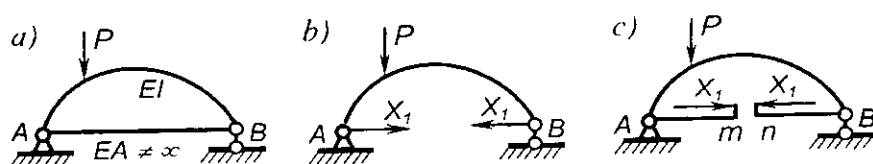
Nếu chọn hệ cơ bản bằng cách cắt liên kết có chuyển vị thì điều kiện biến dạng vẫn bằng không (hình 5.12c) bởi vì lúc này chuyển vị tương ứng với cặp ẩn số  $X_1$  là chuyển vị tương đối, tuy gối A có chuyển vị cưỡng bức nhưng chuyển vị tương đối giữa hai điểm cắt  $m$  và  $n$  vẫn bằng không

$$\Delta_{X_1(X_1, X_2, \dots, X_n, Z)} = 0.$$

Do đó, để thống nhất điều kiện biến dạng luôn luôn bằng không trong tất cả mọi trường hợp, ta quy định chỉ được phép cắt các liên kết tựa có chuyển vị cưỡng bức.

2) Khi chọn hệ cơ bản cho hệ dàn siêu tĩnh, hệ siêu tĩnh có liên kết đàn hồi hoặc các thanh hai đầu khớp với độ cứng hữu hạn ( $EA \neq \infty$ ) và tải trọng không tác dụng trên thanh, để thống nhất điều kiện biến dạng luôn luôn bằng không trong mọi trường hợp, ta quy định chỉ được phép

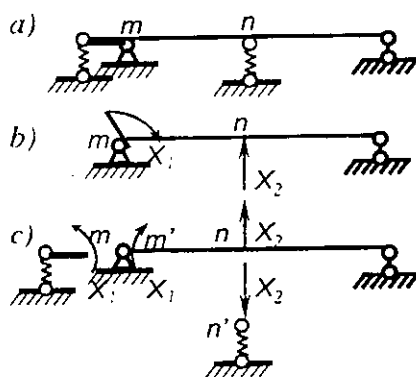
cắt các liên kết tựa có chuyển vị cưỡng bức, các liên kết đàn hồi hoặc các thanh hai đầu khớp và thay thế bằng các cặp lực  $X_k$  ngược chiều nhau mà không được phép loại bỏ.



Hình 5.13

Thật vậy, với hệ trên hình 5.13a: nếu chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ thanh căng  $AB$  (hình 5.13b) thì phương trình cơ bản biểu thị chuyển vị tương đối giữa  $A$  và  $B$  theo phương  $AB$ , chuyển vị này khác không vì trong thanh  $AB$  có biến dạng dọc trục; nếu chọn hệ cơ bản bằng cách cắt thanh  $AB$  (hình 5.13c) thì chuyển vị tương đối giữa hai điểm  $m$  và  $n$  bằng không và phương trình cơ bản luôn bằng không.

Cũng lập luận tương tự, với hệ trên hình 5.14a: nếu chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ các liên kết đàn hồi tại  $m$  và  $n$  (hình 5.14b) thì phương trình cơ bản biểu thị chuyển vị tương ứng tại  $m$  và  $n$  sẽ khác không vì liên kết đàn hồi có biến dạng; nếu chọn hệ cơ bản bằng cách cắt các liên kết đàn hồi như trên hình 5.14c thì chuyển vị tương đối tương ứng giữa hai tiết diện ở hai bên  $m$  ( $m, m'$ ) và  $n$  ( $n, n'$ ) bằng không và phương trình cơ bản luôn bằng không.



Hình 5.14

### B. Hệ phương trình chính tắc

Trong giáo trình này ta chỉ nghiên cứu những hệ thoả mãn điều kiện áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, với những hệ này ta có thể biểu thị phương trình cơ bản thứ  $k$  của hệ (5.2) dưới dạng:

$$\Delta_{X_k}(X_1, X_2, \dots, X_k, \dots, X_n, P, t, \Delta, Z) = \Delta_{X_k X_1} + \Delta_{X_k X_2} + \dots + \Delta_{X_k X_k} + \dots + \Delta_{X_k X_n} + \Delta_{X_k P} + \Delta_{X_k t} + \Delta_{X_k \Delta} + \Delta_{X_k Z} = 0.$$



$$\delta_{km} X_m = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k N_m}{EA} ds + \sum \int_V \frac{\bar{Q}_k Q_m}{GA} ds + \sum_j \bar{R}_{jk} \frac{R_{jm}}{c_j}$$

Chia cả hai vế cho  $X_m$  ta có:

$$\delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{M}_k \bar{M}_m}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k \bar{N}_m}{EA} ds + \sum \int_V \frac{\bar{Q}_k \bar{Q}_m}{GA} ds + \sum_j \bar{R}_{jk} \frac{\bar{R}_{jm}}{c_j} \quad (5.4)$$

Tương tự:

$$\delta_{kk} = \sum \int \frac{\bar{M}_k \bar{M}_k}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k \bar{N}_k}{EA} ds + \sum \int_V \frac{\bar{Q}_k \bar{Q}_k}{GA} ds + \sum_j \bar{R}_{jk} \frac{\bar{R}_{jk}}{c_j} \quad (5.5)$$

trong đó:

$\bar{M}_k, \bar{N}_k, \bar{Q}_k, \bar{R}_{jk}$  – các biểu thức giải tích của mômen uốn, lực dọc, lực cắt và phản lực tại gối đàn hồi thứ  $j$  do riêng lực không thứ nguyên  $X_k=1$  gây ra trong hệ cơ bản;

$\bar{M}_m, \bar{N}_m, \bar{Q}_m, \bar{R}_{jm}$  – cũng là những đại lượng trên nhưng do riêng lực không thứ nguyên  $X_m=1$  gây ra trong hệ cơ bản;

$c_j$  – hệ số đàn hồi tại gối đàn hồi thứ  $j$ .

Dấu tổng của các số hạng cuối được tính theo số lượng liên kết đàn hồi.

Đối với những trường hợp có thể áp dụng cách "nhân biểu đồ" theo Vêrêxaghin, ta có:

$$\delta_{km} = (\bar{M}_k)(\bar{M}_m) + (\bar{N}_k)(\bar{N}_m) + (\bar{Q}_k)(\bar{Q}_m) + \sum_j \bar{R}_{jk} \frac{\bar{R}_{jm}}{c_j}; \quad (5.6)$$

$$\delta_{kk} = (\bar{M}_k)(\bar{M}_k) + (\bar{N}_k)(\bar{N}_k) + (\bar{Q}_k)(\bar{Q}_k) + \sum_j \bar{R}_{jk} \frac{\bar{R}_{jk}}{c_j}$$

trong đó:

$(\bar{M}_k), (\bar{N}_k), (\bar{Q}_k)$  – các biểu đồ nội lực do riêng lực không thứ nguyên  $X_k=1$  gây ra trong hệ cơ bản;

$(\bar{M}_m), (\bar{N}_m), (\bar{Q}_m)$  – các biểu đồ nội lực do riêng lực không thứ nguyên  $X_m=1$  gây ra trong hệ cơ bản.

Từ các công thức trên ta thấy luôn luôn có:

$$\delta_{kk} > 0; \quad \delta_{km} \geq 0, \quad (5.7)$$



vì trong công thức xác định  $\delta_{kk}$  (5.5), các hàm số dưới dấu tích phân đều là bình phương của nội lực nên luôn luôn dương còn trong công thức xác định  $\delta_{km}$  (5.4) thì các hàm số đó có dấu bất kỳ. Ngoài ra theo định lý tương hỗ của các chuyển vị đơn vị, ta có:

$$\delta_{km} = \delta_{mk} . \quad (5.8)$$

## 2. Cách tính các số hạng tự do

Ta lần lượt xác định số hạng tự do tương ứng với các nguyên nhân sau:

### a) Tải trọng

$\Delta_{kP}$  là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $X_k$  do riêng các tải trọng gây ra trong hệ cơ bản. Do đó khi áp dụng công thức chuyển vị (4.33) cho trường hợp này ta chỉ cần thay chỉ số  $m$  bằng chỉ số  $P$ . Ngoài ra để nhấn mạnh rằng chuyển vị  $\Delta_{kP}$  là do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản, ta thêm chỉ số  $o$  vào các biểu thức nội lực và phản lực.

$$\Delta_{kP} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_P^o}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k N_P^o}{EA} ds + \sum \int \frac{\bar{Q}_k Q_P^o}{GA} ds + \sum_j \bar{R}_{jk} \frac{R_{jP}^o}{c_j} .$$

(5.9)

trong đó  $M_P^o$ ,  $N_P^o$ ,  $Q_P^o$ ,  $R_{jP}^o$  – biểu thức giải tích của mômen uốn, lực dọc, lực cắt và phản lực tại gối đàn hồi thứ  $j$  do riêng tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

Trong trường hợp có thể áp dụng cách "nhân biểu đồ" ta có:

$$\Delta_{kP} = (\bar{M}_k)(M_P^o) + (\bar{N}_k)(N_P^o) + (\bar{Q}_k)(Q_P^o) + \sum_j \bar{R}_{jk} \frac{R_{jP}^o}{c_j} . \quad (5.10)$$

trong đó  $(M_P^o)$ ,  $(N_P^o)$ ,  $(Q_P^o)$  – các biểu đồ nội lực do riêng tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

**Chú ý:** Trong những cấu kiện chịu uốn của hệ, ta thường có thể bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt so với ảnh hưởng của mômen uốn khi xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc.

### b) Thay đổi nhiệt độ

$\Delta_{kT}$  là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $X_k$ , do sự thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản. Nếu hệ cơ bản là tĩnh định, sự thay đổi nhiệt độ không gây ra phản lực và nội lực trong hệ tĩnh định nên ta xác định  $\Delta_{kT}$  theo (4.30):

$$\Delta_{kt} = \sum \int \bar{M}_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) ds + \sum \int \bar{N}_k \alpha t_{cm} ds.$$

Trong trường hợp hệ gồm những thanh thẳng có tiết diện không đổi trong từng đoạn thanh và nhiệt độ thay đổi như nhau dọc theo chiều dài của từng đoạn thanh, ta dùng công thức (4.31) để xác định  $\Delta_{kt}$ :

$$\Delta_{kt} = \sum \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \Omega(\bar{M}_k) + \sum \alpha t_{cm} \Omega(\bar{N}_k). \quad (5.11)$$

trong đó  $\Omega(\bar{M}_k)$  và  $\Omega(\bar{N}_k)$  – diện tích biểu đồ mômen uốn và biểu đồ lực dọc do riêng lực  $X_k = I$  gây ra trong hệ cơ bản.

Các ký hiệu còn lại cũng có ý nghĩa như đã chỉ dẫn khi thiết lập công thức (4.31).

#### c) Chế tạo chiều dài các thanh không chính xác

$\Delta_{k\Delta}$  là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $X_k$  do sự chế tạo chiều dài các thanh không chính xác gây ra trong hệ cơ bản. Nếu hệ cơ bản là tĩnh định, nguyên nhân này không gây ra phản lực và nội lực trong hệ tĩnh định nên ta xác định  $\Delta_{k\Delta}$  theo (4.32):

$$\Delta_{k\Delta} = \sum_i \bar{N}_{ik} \Delta_i, \quad (5.12)$$

trong đó:

$\Delta_i$  – độ dời của thanh thứ  $i$  khi thanh được chế tạo dài hơn chiều dài cần thiết theo thiết kế;

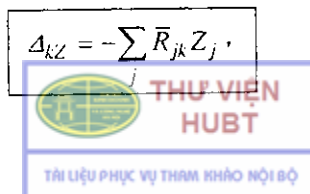
$\bar{N}_{ik}$  – lực dọc trong thanh thứ  $i$  do riêng lực  $X_k = I$  gây ra trong hệ cơ bản tĩnh định.

Dấu tổng được thực hiện theo số lượng các thanh có chiều dài chế tạo không chính xác.

#### d) Chuyển vị gối tựa

$\Delta_{kZ}$  là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $X_k$  do chuyển vị cưỡng bức  $Z$  tại các liên kết tựa gây ra trong hệ cơ bản và được xác định theo (4.25). Trong trường hợp hệ cơ bản là tĩnh định, nguyên nhân này không gây ra phản lực và nội lực trong hệ tĩnh định nên theo (4.29), ta có:

$$\Delta_{kZ} = -\sum \bar{R}_{jk} Z_j, \quad (5.13)$$



trong đó:

$Z_j$  – chuyển vị cưỡng bức cho biết tại liên kết thứ  $j$  của hệ siêu tĩnh;

$\bar{R}_{jk}$  – phản lực tại liên kết  $j$  do lực  $X_k=1$  gây ra trong hệ cơ bản tĩnh định.

Dấu tổng được thực hiện theo số lượng các liên kết có chuyển vị cưỡng bức.

### C. Cách tìm nội lực và biến dạng trong hệ siêu tĩnh

Khi tính hệ siêu tĩnh ta phải xác định được nội lực và biến dạng tại bất kỳ vị trí nào của hệ. Dưới đây ta sẽ nghiên cứu cách xác định các đại lượng đó sau khi đã biết giá trị của các ẩn  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

#### 1. Cách tính trực tiếp

Sau khi giải hệ phương trình chính tắc để tìm các ẩn  $X_k$ , ta xem các lực này như ngoại lực tác dụng trên hệ cơ bản với giá trị vừa tìm được. Lúc này, có thể thay việc tính nội lực và biến dạng trên hệ siêu tĩnh bằng cách tính nội lực và biến dạng trên hệ cơ bản chịu các nguyên nhân bên ngoài và các lực  $X_k$ . Vì hệ cơ bản thường là tĩnh định nên có thể sử dụng các phương pháp đã biết để xác định các đại lượng cần tìm.

#### 2. Cách áp dụng nguyên lý cộng tác dụng

Giả sử cần tính đại lượng  $S$  tại một vị trí bất kỳ của hệ. Đại lượng  $S$  có thể là phản lực tại một gối tựa nào đó hay mômen uốn, lực dọc, lực cắt, chuyển vị tại một tiết diện nào đó. Theo cách tính trực tiếp nói trên, ta thay việc tính đại lượng  $S$  trong hệ siêu tĩnh bằng cách tính đại lượng  $S$  trong hệ cơ bản nhưng do các nguyên nhân bên ngoài và các lực  $X_k$  cùng đồng thời tác dụng gây ra.

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể viết:

$$S = S_{(X_1, X_2, \dots, X_n, P, t, \Delta, Z)} = S_{X_1} + S_{X_2} + \dots + S_{X_n} + S_P^o + S_t^o + S_\Delta^o + S_Z^o,$$

trong đó  $S_{X_1}, S_{X_2}, \dots, S_{X_n}, S_P^o, S_t^o, S_\Delta^o, S_Z^o$  là giá trị của đại lượng  $S$  lần lượt do riêng từng nguyên nhân  $X_1, X_2, \dots, X_n, P, t, \Delta$  và  $Z$  gây ra trong hệ cơ bản.

Nếu gọi  $\bar{S}_k$  là giá trị của đại lượng  $S$  do riêng lực  $X_k = 1$  gây ra trong hệ cơ bản ta có:

$$S_{X_k} = \bar{S}_k X_k. \quad (5.14)$$

Thay (5.14) vào biểu thức trên ta được biểu thức tổng quát để xác định nội lực và chuyển vị trong hệ siêu tĩnh:

$$S = \bar{S}_1 X_1 + \bar{S}_2 X_2 + \dots + \bar{S}_n X_n + S_P^o + S_I^o + S_A^o + S_Z^o. \quad (5.15)$$

Trong trường hợp cần tìm các biểu đồ nội lực hay chuyển vị, cũng lý luận tương tự, ta có biểu thức tổng quát sau:

$$(S) = (\bar{S}_1) X_1 + (\bar{S}_2) X_2 + \dots + (\bar{S}_n) X_n + (S_P^o) + (S_I^o) + (S_A^o) + (S_Z^o) \quad (5.16)$$

trong đó:

$(\bar{S}_k)$  – biểu đồ của đại lượng  $S$  do riêng lực  $X_k = 1$  gây ra trong hệ cơ bản;

$(S_P^o), (S_I^o), (S_A^o), (S_Z^o)$  – biểu đồ của đại lượng  $S$  do riêng tải trọng, riêng sự thay đổi nhiệt độ, riêng sự chế tạo chiều dài các thanh không chính xác và riêng chuyển vị gối tựa gây ra trong hệ cơ bản.

Các biểu thức (5.15) và (5.16) áp dụng chung cho mọi trường hợp, giả sử muốn tìm mômen uốn  $M$  hay độ võng  $y$ , ta cần thay thế ký hiệu  $S$  bằng ký hiệu tương ứng  $M$  hay  $y$ .

Dùng các biểu thức này có lợi khi đã có sẵn các trạng thái đơn vị tức là đã biết các giá trị  $\bar{S}_k$ . Đối với dầm và khung siêu tĩnh, vẽ biểu đồ mômen uốn theo cách này rất tiện lợi vì đã có sẵn các biểu đồ mômen uốn đơn vị trong quá trình xác định các hệ số.

**Chú ý:** Nếu đại lượng  $S$  chỉ là phản lực hoặc nội lực (không phải chuyển vị) và hệ cơ bản là tĩnh định thì các đại lượng  $S_P^o, S_A^o, S_Z^o$  và các biểu đồ  $(S_I^o), (S_A^o), (S_Z^o)$  sẽ không tồn tại vì như ta đã biết những nguyên nhân này không gây ra phản lực và nội lực trong hệ tĩnh định.

### 3. Cách vẽ biểu đồ lực cắt và lực dọc theo biểu đồ mômen uốn

Trong trường hợp dầm và khung gồm những thanh thẳng, người ta thường bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc so với ảnh hưởng của mômen uốn khi xác định chuyển vị, do đó trong các khâu tính toán trung gian ta không cần vẽ các biểu đồ đơn vị  $(\bar{Q}_k)$  và  $(\bar{N}_k)$ . Bởi vậy, nếu vẽ biểu đồ  $(Q)$  và  $(N)$  theo cách trên sẽ bất lợi vì không có sẵn các biểu đồ  $(\bar{Q}_k)$  và  $(\bar{N}_k)$ . Trong những trường hợp này, nên vẽ biểu đồ  $(M)$ .



trước tiên theo biểu thức (5.16), sau đó căn cứ vào biểu đồ ( $M$ ) để suy ra biểu đồ ( $Q$ ) và ( $N$ ).

Cách vẽ biểu đồ ( $Q$ ) và ( $N$ ) theo biểu đồ ( $M$ ) dựa trên cơ sở khảo sát sự cân bằng của từng đoạn thanh được tách riêng ra đồng thời chú ý tới liên hệ vi phân đã biết trong mục 2.4:

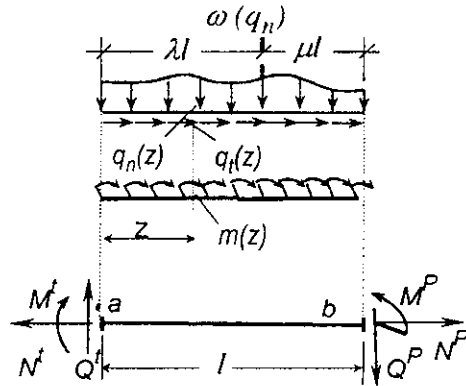
$$Q = \frac{dM}{dz} - m; \quad \frac{dN}{dz} = -q_r$$

Khi thực hiện, cần tách từng đoạn thanh trong đó tải trọng phân bố liên tục.

Để tiện lợi cho việc áp dụng ta lập công thức xác định lực cắt, lực dọc ở hai đầu của một đoạn thanh thẳng chịu tải trọng phân bố liên tục với quy luật bất kỳ như trên hình 5.15:

- lực phân bố pháp tuyến với cường độ  $q_n(z)$ ;
- lực phân bố tiếp tuyến với cường độ  $q_t(z)$ ;
- mômen phân bố với cường độ  $m(z)$ ;

Sau khi tách thanh  $ab$  (hình 5.15) ra khỏi hệ thanh ta cần thay thế tác dụng của phần còn lại bằng các lực cắt, lực dọc chưa biết và các mômen uốn đã biết từ biểu đồ ( $M$ ). Các nội lực chưa biết được giả thiết là dương và vẽ theo quy ước về dấu đã quy định.



Hình 5.15

Từ các điều kiện cân bằng tổng mômen đối với điểm  $b$  và điểm  $a$ , ta suy ra:

$$\begin{cases} Q^a = \frac{l}{l}(M^b - M^a) + \mu \cdot \omega(q_n) - \frac{\omega_m}{l}; \\ Q^b = \frac{l}{l}(M^b - M^a) - \lambda \cdot \omega(q_n) - \frac{\omega_m}{l}. \end{cases} \quad (5.17a)$$

trong đó:

$Q^a$ ,  $M^a$  và  $Q^b$ ,  $M^b$  - lần lượt là lực cắt, mômen uốn tại đầu trái và đầu



phải thanh  $ab$  đối với người quan sát đứng sao cho lực phân bố hướng xuống phía dưới;

$\omega(q_n)$  – hợp lực của tải trọng phân bố hay diện tích biểu đồ tải trọng phân bố  $q_n$  trên thanh  $ab$ ;

$\omega(q_l)$  – hợp lực của tải trọng phân bố hay diện tích biểu đồ tải trọng phân bố  $q_l$  trên thanh  $ab$ ;

$\lambda$  và  $\mu$  – lần lượt là tỉ số khoảng cách từ hợp lực  $\omega_q$  đến đầu trái và đầu phải thanh  $ab$  so với chiều dài theo phương ngang  $l$  của thanh  $ab$ .

$\omega_m$  – hợp lực của mômen phân bố hay diện tích biểu đồ mômen phân bố  $m$  trên thanh  $ab$ .

Từ các điều kiện cân bằng hình chiếu lên phương ngang, ta có hệ thức:

$$N^p = N^l + \omega(q_l). \quad (5.17b)$$

Sau khi xác định được lực cắt ở hai đầu thanh ta dễ dàng vẽ được biểu đồ lực cắt trong thanh theo quy cách đã trình bày trong chương 2.

#### Trường hợp đặc biệt:

❖ Khi thanh chịu các tải trọng phân bố đều, ( $q_n = const$ ;  $q_l = const$ ;  $m = const$ ): giá trị của lực cắt và lực dọc được xác định như sau:

$$\begin{aligned} Q^l &= tg\beta + \frac{l}{2} q_n l - m; \\ Q^p &= tg\beta - \frac{l}{2} q_n l - m; \\ N^p &= N^l + q_l l. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Với:

$$tg\beta = \frac{M^p - M^l}{l}.$$

Ta thấy  $\beta$  chính là góc nghiêng so với đường chuẩn của đường nối hai tung độ của mômen uốn ở hai đầu đoạn thanh. Dấu của  $tg\beta$  được xác định như sau: đặt bút dọc theo đường chuẩn của biểu đồ mômen uốn, quay bút trong miền có biểu đồ mômen tới đường nối hai tung độ ở hai đầu đoạn thanh, nếu chiều quay thuận chiều kim đồng hồ thì  $tg\beta$  dương và ngược lại.

❖ Khi thanh không chịu tải trọng phân bố ( $q_n = 0$ ;  $q_l = 0$ ;  $m = 0$ ): giá trị của lực cắt và lực dọc được xác định như sau:

$$\begin{aligned} Q^l &= Q^p = tg\beta \\ N^p &= N^l. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Các hệ thức về lực dọc nêu trên thường chưa đủ để vẽ biểu đồ lực dọc. Trong thực hành, cần vẽ biểu đồ lực dọc theo biểu đồ lực cắt đã biết trên cơ sở khảo sát cân bằng của các nút hoặc của từng phần hệ được tách ra khỏi hệ thanh.

Khi khảo sát cân bằng, ngoài tải trọng đặt ở nút hoặc đặt trên từng phần hệ ta cần thay thế những phần còn lại bằng các nội lực bao gồm mômen uốn, lực cắt đã biết và lực dọc chưa biết. Các lực dọc chưa biết được vẽ với giả thiết là dương. Sau khi vận dụng các phương trình cân bằng thích hợp ta có thể xác định được các lực dọc cần tìm. Nên dùng biện pháp này để xác định lực dọc ở hai đầu thanh. Sau khi xác định được lực dọc ở hai đầu mỗi thanh, ta dễ dàng vẽ được biểu đồ lực dọc trong thanh theo quy cách đã trình bày trong chương 2.

### 5.3. Áp dụng

#### A. Khung siêu tĩnh chịu tải trọng bất động

*Ví dụ 5.3.* Vẽ biểu đồ nội lực trong khung cho trên hình 5.16a.

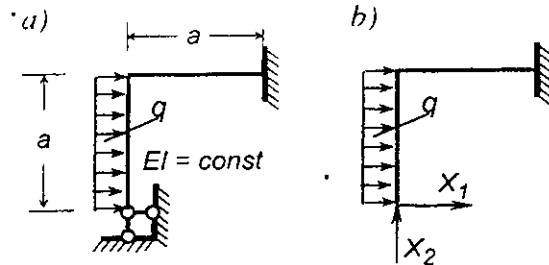
Quá trình tính toán được thực hiện theo thứ tự như sau:

- 1) *Xác định bậc siêu tĩnh.* Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng 2.
- 2) *Chọn hệ cơ bản.* Có nhiều cách chọn hệ cơ bản, ở đây ta chọn hệ cơ bản như trên hình 5.16b.
- 3) *Thiết lập hệ phương trình chính tắc.*

Hệ có bậc siêu tĩnh bằng 2 nên ta có hai phương trình chính tắc:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$



Hình 5.16

Để xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc ta sử dụng các công thức (5.6) và (5.10) với chú ý là hệ không có liên kết đàn hồi đồng thời bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt khi tính các chuyển vị. Ta có:

$$\delta_{km} = (\bar{M}_k)(\bar{M}_m); \quad \delta_{kk} = (\bar{M}_k)(\bar{M}_k); \quad \Delta_{kP} = (\bar{M}_k)(M_P^o).$$

Như vậy, cần vẽ các biểu đồ mômen uốn lần lượt do  $X_1 = 1$ ;  $X_2 = 1$  và tải

trọng gây ra trong hệ cơ bản (hình 5.17a, b, c). Ta có:

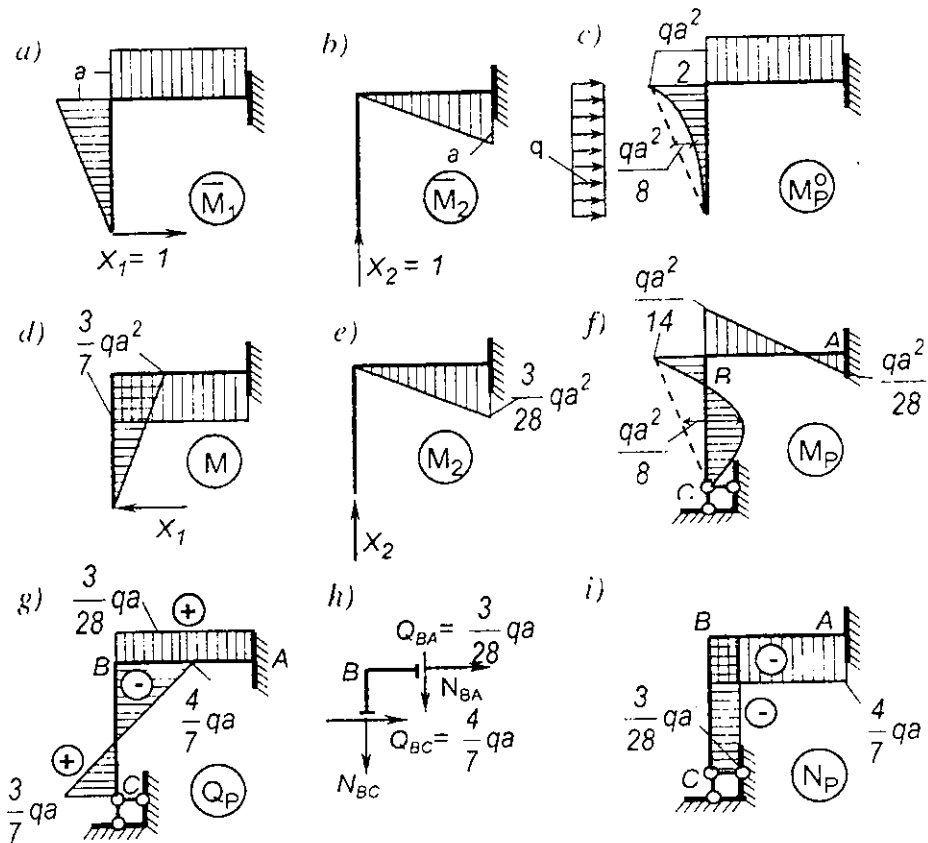
$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{a^2}{2} \frac{2a}{3} + a^2 \cdot a \right] = \frac{4a^3}{3EI};$$

$$\delta_{22} = (\bar{M}_2)(\bar{M}_2) = \frac{1}{EI} \frac{a^2}{2} \frac{2a}{3} = \frac{a^3}{3EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_2) = -\frac{1}{EI} \frac{a^2}{2} a = -\frac{a^3}{2EI};$$

$$\Delta_{1P} = (\bar{M}_1)(M_P^o) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \frac{qa^2}{2} a \frac{2a}{3} - \frac{2}{3} \frac{qa^2}{8} a \frac{a}{2} + \frac{qa^2}{2} a \cdot a \right] = \frac{5qa^4}{8EI};$$

$$\Delta_{2P} = (\bar{M}_2)(M_P^o) = -\frac{1}{EI} \frac{qa^2}{2} a \frac{a}{2} = -\frac{qa^4}{4EI}.$$



Hình 5.17

Thay các kết quả vào hệ phương trình chính tắc, ta được:

$$\frac{4a^3}{3EI} X_1 - \frac{a^3}{2EI} X_2 + \frac{5qa^4}{8EI} = 0; \quad -\frac{a^3}{2EI} X_1 + \frac{a^3}{3EI} X_2 - \frac{qa^4}{4EI} = 0.$$

Hay  $\frac{4}{3} X_1 - \frac{1}{2} X_2 + \frac{5}{8} qa = 0; \quad -\frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{3} X_2 - \frac{1}{4} qa = 0.$

4) Giải hệ phương trình chính tắc để xác định các ẩn  $X_1, X_2$ . Kết quả:

$$X_1 = -\frac{3}{7} qa; \quad X_2 = \frac{3}{28} qa.$$

5) Vẽ biểu đồ mômen uốn. Trong ví dụ này ta vẽ biểu đồ mômen uốn theo nguyên lý cộng tác dụng. Từ biểu thức (5.16) ta có:

$$(M) = (\bar{M}_1) X_1 + (\bar{M}_2) X_2 + (M_P^o).$$

Như vậy, để vẽ biểu đồ mômen uốn trong hệ siêu tĩnh đã cho ta cần:

- Nhân các tung độ của biểu đồ  $(\bar{M}_1)$  với giá trị  $X_1 = -3qa/7$  sẽ được biểu đồ  $(M_1)$  ngược chiều thứ căng với biểu đồ  $(\bar{M}_1)$  (hình 5.17d).
- Nhân các tung độ của biểu đồ  $(\bar{M}_2)$  với giá trị  $X_2 = 3qa/28$  sẽ được biểu đồ  $(M_2)$  (hình 5.17e).
- Cộng ba biểu đồ: biểu đồ  $(M_1)$  (hình 5.17d), biểu đồ  $(M_2)$  (hình 5.17e) và biểu đồ  $(M_P^o)$  (hình 5.17c); ta sẽ được biểu đồ mômen uốn cuối cùng cần tìm  $(M_P)$  (hình 5.17f).

6) Vẽ biểu đồ lực cắt theo biểu đồ mômen uốn

- Trên thanh ngang: biểu đồ lực cắt có dạng đường thẳng song song với đường chuẩn và có giá trị xác định theo (5.19):

$$Q_{BA} = t g \beta_{BA} = +\frac{1}{a} \left( \frac{qa^2}{28} + \frac{qa^2}{14} \right) = +\frac{3}{28} qa.$$

- Trên thanh đứng: biểu đồ lực cắt có dạng bậc nhất, ta chỉ cần xác định giá trị của lực cắt tại các đầu thanh  $Q_{CB}$  và  $Q_{BC}$  rồi nối lại với nhau bằng đường thẳng. Theo công thức (5.18) ta có:

$$Q_{CB} = Q' = t g \beta_{CB} + \frac{qa}{2} = -\frac{qa^2}{14} \frac{1}{a} + \frac{qa}{2} = +\frac{3}{7} qa;$$

$$Q_{BC} = Q'' = t g \beta_{CB} - \frac{qa}{2} = -\frac{qa^2}{14} \frac{1}{a} - \frac{qa}{2} = -\frac{4}{7} qa.$$

Biểu đồ lực cắt vẽ trên hình 5.17g.

7) *Vẽ biểu đồ lực dọc theo biểu đồ lực cắt bằng cách tách nút*

Trong trường hợp này  $q_l = 0$  nên lực dọc không thay đổi trong từng thanh, do đó chỉ cần xác định một giá trị lực dọc tại một tiết diện nào đó trong mỗi thanh là đủ để vẽ biểu đồ.

Tách nút B (hình 5.17h), sau khi đặt tại những tiết diện bị cắt các lực cắt có giá trị và chiều đã biết theo biểu đồ  $Q$  đồng thời đặt các lực dọc  $N_{AB}$  và  $N_{BC}$  chưa biết (giả thiết là dương), ta viết phương trình cân bằng hình chiếu:

$$\sum X = N_{AB} + \frac{4}{7}qa = 0, \quad \text{suy ra} \quad N_{AB} = -\frac{4}{7}qa;$$

$$\sum Y = -N_{BC} - \frac{3}{28}qa = 0, \quad \text{suy ra} \quad N_{BC} = -\frac{3}{28}qa.$$

Biểu đồ lực dọc vẽ trên hình 5.17i

**Ví dụ 5.4.** Vẽ biểu đồ ( $M$ ), ( $N$ ), ( $Q$ ) cho khung trên hình 5.18a. Cho biết thanh  $AB$  có độ cứng khi kéo hoặc nén là  $EA = EI/10l^2$ . Ảnh hưởng của lực dọc cần được xét đến trong thanh  $AB$  khi tính chuyển vị.

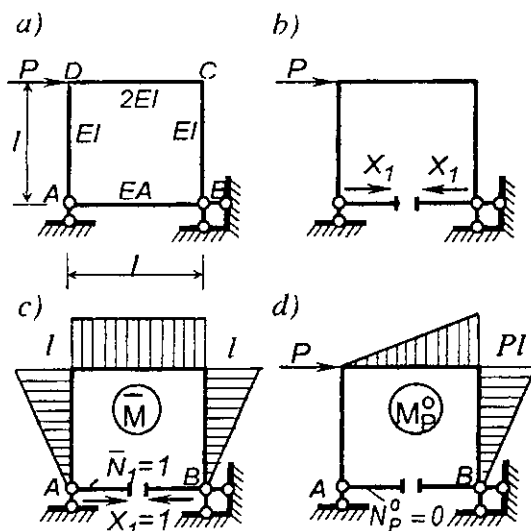
Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng một. Chọn hệ cơ bản bằng cách cắt thanh có hai đầu khớp như trên hình 5.18b.

Phương trình chính tắc:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Để xác định  $\delta_{11}$  và  $\Delta_{1P}$  ta cần vẽ biểu đồ ( $\bar{M}_1$ ) và biểu đồ ( $M_P^0$ ) (hình 5.18c, d).

Ngoài ra, vì chỉ yêu cầu xét đến ảnh hưởng của lực dọc trong thanh  $AB$ , nên ta chỉ cần xác định lực dọc trong thanh  $AB$  do  $X_1=l$  gây ra và do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản, kết quả ghi trên hình 5.18c, d.



Hình 5.18



Trong trường hợp này, hệ số  $\delta_{11}$  và số hạng tự do  $\Delta_{1P}$  được xác định như sau:

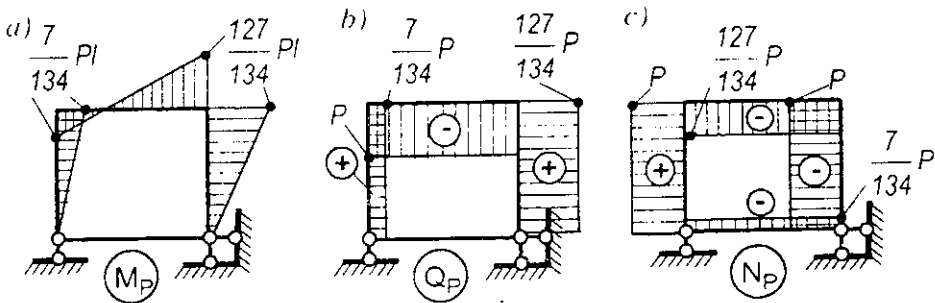
$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) + (\bar{N}_1)(\bar{N}_1) = 2 \frac{1}{EI} \frac{1 \cdot l \cdot 2l}{2 \cdot 3} + \frac{l^3}{2EI} + \frac{1}{EA} l \cdot l \cdot l = \frac{67l^3}{6EI};$$

$$\Delta_{1P} = (\bar{M}_1)(M_P^a) = \frac{1}{2EI} \frac{Pl^2}{2} l + \frac{1}{EI} \frac{Pl^2}{2} \frac{2}{3} l = \frac{7Pl^3}{12EI}.$$

Thay các trị số này vào phương trình chính tắc và giải ra ta được:

$$X_1 = -\frac{7P}{134}.$$

Cũng thực hiện các bước tiếp theo tương tự như trong ví dụ trên, ta dễ dàng vẽ được biểu đồ mômen uốn, lực cắt và lực dọc như trên hình (5.19a, b, c).



Hình 5.19

**Ví dụ 5.5.** Vẽ biểu đồ mômen uốn cho khung có liên kết đàn hồi chịu lực như trên hình 5.20a. Cho biết: hệ số đàn hồi: tại gối  $E$  là  $c_1 = 3EI/a^3$ ; tại ngàm  $A$  là  $c_2 = EI/6a$ .

Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng hai.

Để giải bài toán này ta có thể quy đổi các liên kết đàn hồi về các thanh có hai đầu khớp với độ cứng  $EA$  và chiều dài  $l$  tương đương và thực hiện tính toán tương tự như trong ví dụ trên. Cách quy đổi như sau: trên cơ sở định luật Hooke, độ cứng đơn vị ( $EA/l$ ) của thanh thay thế được xác định bằng tỷ số giữa lực dọc  $N$  với biến dạng dọc trục  $\Delta$  tương ứng:  $(EA/l) = N/\Delta$ .

• Với liên kết đàn hồi tại gối  $E$  có hệ số đàn hồi  $c_1$  ta có:  $N = c_1$ ;  $\Delta = l$ . Do đó: độ cứng đơn vị tương đương của thanh thay thế  $(EA/l)_1 = c_1$ .

• Với ngàm đàn hồi tại  $A$  có hệ số đàn hồi  $c_2$  ta có:  $N = c_2/e$ ;  $\Delta = e/l$ . Do đó: độ cứng đơn vị tương đương của thanh thay thế tại  $F$  là  $(EA/l)_2 = c_2/e^2$ .

Trong bài giải này ta không áp dụng cách quy đổi độ cứng mà tính toán

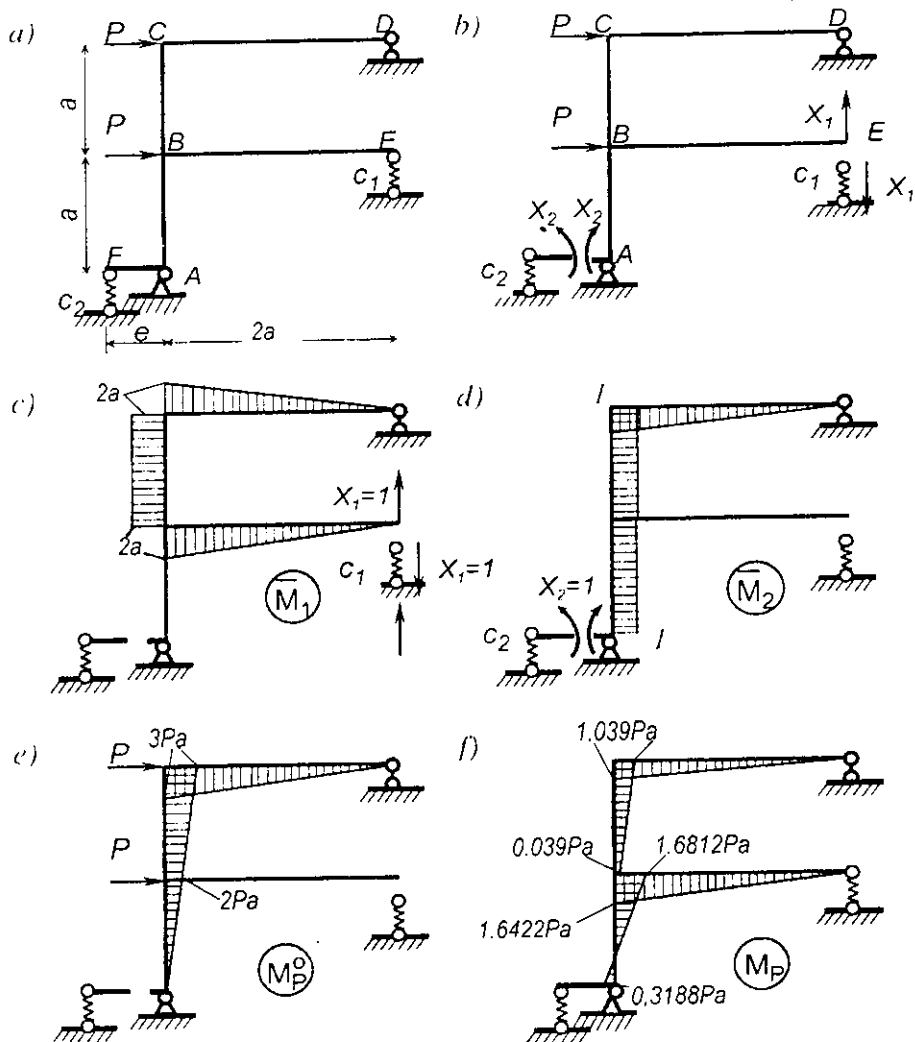
trực tiếp và thực hiện với hai phương án chọn hệ cơ bản:

1. Chọn hệ cơ bản bằng cách cắt các liên kết đàn hồi như trên hình 5.20b.

Hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 ;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 .$$



Hình 5.20

Để xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc ta sử dụng các công thức (5.6) và (5.10) với giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt khi tính các chuyển vị.

Các biểu đồ mômen uốn lần lượt do  $X_1 = 1$ ;  $X_2 = 1$  và tải trọng gây ra trong hệ cơ bản như trên hình 5.20c, d, e). Ta có:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) + \frac{\bar{R}_{11}\bar{R}_{11}}{c_1} = \frac{1}{EI} \left[ 2 \cdot 2a^2 \cdot \frac{2 \cdot 2a}{3} + 2a^2 \cdot 2a \right] + 1 \cdot 1 \cdot \frac{a^3}{3EI} = \\ &= \frac{29a^3}{3EI}; \end{aligned}$$

$$\delta_{22} = (\bar{M}_2)(\bar{M}_2) + \frac{\bar{R}_{22}\bar{R}_{22}}{c_2} = \frac{1}{EI} \left[ a \cdot \frac{2 \cdot 1}{3} + 2a \cdot 1 \right] + 1 \cdot 1 \cdot \frac{6a}{EI} = \frac{26a}{3EI};$$

$$\begin{aligned} \delta_{12} = \delta_{21} &= (\bar{M}_1)(\bar{M}_2) + \frac{\bar{R}_{11}\bar{R}_{12}}{c_1} + \frac{\bar{R}_{21}\bar{R}_{22}}{c_2} = \\ &= -\frac{1}{EI} \left[ 2a^2 \cdot \frac{2 \cdot 1}{3} + 2a^2 \cdot 1 \right] + \frac{1 \cdot 0}{c_1} + \frac{0 \cdot 1}{c_2} = -\frac{10a^2}{3EI}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= (\bar{M}_1)(M_P^0) + \frac{\bar{R}_{11}R_{1P}^0}{c_1} + \frac{\bar{R}_{21}R_{2P}^0}{c_2} = \\ &= -\frac{1}{EI} \left[ 3Pa^2 \cdot \frac{2 \cdot 2a}{3} + \frac{5}{2}Pa^2 \cdot 2a \right] + \frac{1 \cdot 0}{c_1} + \frac{0 \cdot 0}{c_2} = -\frac{9Pa^3}{EI}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2P} &= (\bar{M}_2)(M_P^0) + \frac{\bar{R}_{12}R_{1P}^0}{c_1} + \frac{\bar{R}_{22}R_{2P}^0}{c_2} = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ 3Pa^2 \cdot \frac{2 \cdot 1}{3} + \frac{5}{2}Pa^2 \cdot 1 + Pa^2 \cdot 1 \right] + \frac{0 \cdot 0}{c_1} + \frac{1 \cdot 0}{c_2} = \frac{11Pa^2}{2EI}. \end{aligned}$$

Thay các kết quả vào hệ phương trình chính tắc, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{29a^3}{3EI} X_1 - \frac{10a^2}{3EI} X_2 - 9 \frac{Pa^3}{EI} &= 0; \\ -\frac{10a^2}{3EI} X_1 + \frac{26a}{3EI} X_2 + \frac{11Pa^2}{2EI} &= 0. \end{aligned}$$

Hay  $29aX_1 - 10X_2 - 27Pa = 0;$

$$-20X_1 + 52X_2 + 33Pa = 0.$$

Giải hệ phương trình chính tắc để xác định các ẩn  $X_1, X_2$ . Kết quả:

$$X_1 = 0,8211 P; \quad X_2 = -0,3188 P.$$

Vẽ biểu đồ mômen uốn. Từ biểu thức (5.16) ta có:

$$(M) = (\bar{M}_1)X_1 + (\bar{M}_2)X_2 + (M_P^0).$$

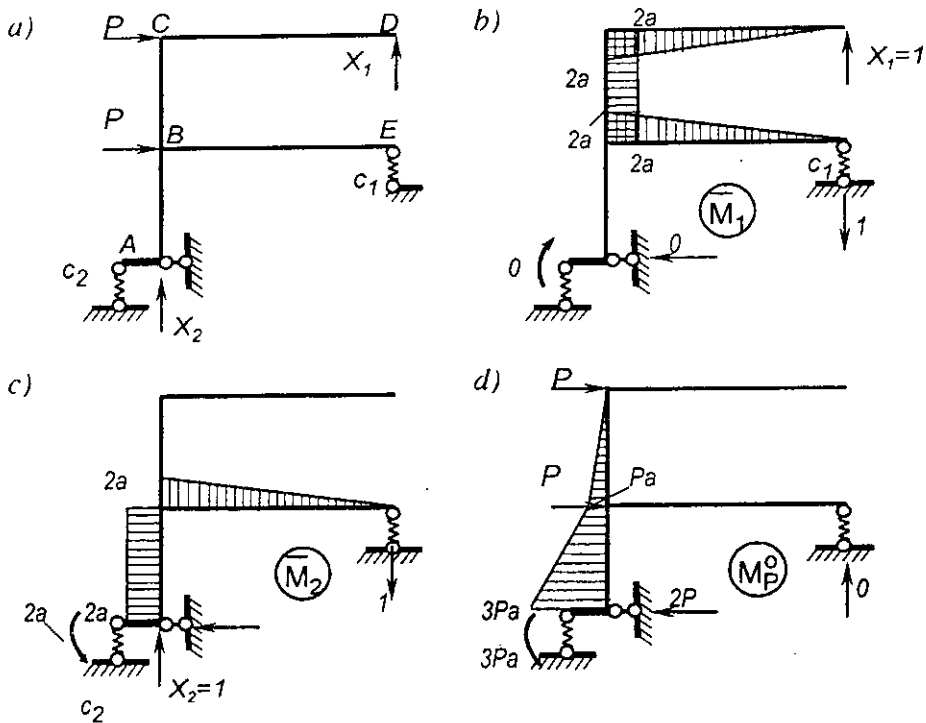
Kết quả tìm được như trên hình 5.20f.

2. Chọn hệ cơ bản không cắt các liên kết đàn hồi như trên hình 5.21a. Hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Các biểu đồ mômen uốn lần lượt do  $X_1 = 1$ ;  $X_2 = 1$  và tải trọng gây ra trong hệ cơ bản như trên hình 5.21b, c, d). Ta có:



Hình 5.21

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) + \frac{\bar{R}_{11}\bar{R}_{11}}{c_1} = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ 2.2a^2 \cdot \frac{2.2a}{3} + 2a^2 \cdot 2a \right] + 1.1 \cdot \frac{a^3}{3EI} = \frac{29a^3}{3EI}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{22} &= (\bar{M}_2)(\bar{M}_2) + \frac{\bar{R}_{22}\bar{R}_{22}}{c_2} = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ 2a^2 \cdot \frac{2 \cdot 2a}{3} + 2a^2 \cdot 2a \right] + 1 \cdot 1 \cdot \frac{a^3}{3EI} + 2a \cdot 2a \cdot \frac{6a}{EI} = 31 \frac{a^3}{EI};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{12} = \delta_{21} &= (\bar{M}_1)(\bar{M}_2) + \frac{\bar{R}_{11}\bar{R}_{12}}{c_1} + \frac{\bar{R}_{21}\bar{R}_{22}}{c_2} = \\ &= - \left[ 2a^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a \right] + 1 \cdot 1 \cdot \frac{a^3}{3EI} + 0 \cdot 2a \cdot \frac{6a^2}{EI} = \frac{3a^3}{EI};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{1P} &= (\bar{M}_1)(M_p'') + \frac{\bar{R}_{11}R_{1P}''}{c_1} + \frac{\bar{R}_{21}R_{2P}''}{c_2} = \\ &= - \frac{1}{EI} \left[ \frac{Pa^2}{2} \cdot 2a \right] + \frac{1 \cdot 0}{c_1} + \frac{0 \cdot 0}{c_2} = - \frac{Pa^3}{EI};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{2P} &= (\bar{M}_2)(M_p'') + \frac{\bar{R}_{12}R_{1P}''}{c_1} + \frac{\bar{R}_{22}R_{2P}''}{c_2} = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2}(Pa + 3Pa) \cdot a \cdot 2a \right] + \frac{0 \cdot 0}{c_1} + \frac{1 \cdot 0}{c_2} = \frac{40Pa^3}{EI}.\end{aligned}$$

Thay các kết quả vào hệ phương trình chính tắc, ta được:

$$\frac{29a^3}{3EI} X_1 + \frac{3a^3}{EI} X_2 - \frac{Pa^3}{EI} = 0;$$

$$\frac{3a^3}{EI} X_1 + \frac{31a^3}{EI} X_2 + \frac{40Pa^3}{EI} = 0.$$

$$\text{Hay } 29X_1 + 9X_2 - 3P = 0; \quad 3X_1 + 31X_2 + 40P = 0.$$

Giải hệ phương trình chính tắc để xác định các ẩn  $X_1, X_2$ . Kết quả:

$$X_1 = 0,5195 P; \quad X_2 = -1,3406 P.$$

Vẽ biểu đồ mômen uốn theo biểu thức (5.16):

$$(M) = (\bar{M}_1)X_1 + (\bar{M}_2)X_2 + (M_p'').$$

Kết quả tìm được như trên hình 5.20f.

## B. Hệ siêu tĩnh chịu sự thay đổi nhiệt độ

**Ví dụ 5.6.** Vẽ biểu đồ mômen uốn trong khung chịu biến thiên nhiệt độ (hình 5.22a). Cho biết các tiết diện có hình chữ nhật, chiều cao  $h$  và độ cứng  $EI$  không đổi. Vật liệu của khung có hệ số giãn nở vì nhiệt là  $\alpha$ .



Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng một.

Hệ cơ bản chọn như trên hình 5.22b.

Phương trình chính tắc:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1t} = 0.$$

Để xác định các hệ số và số hạng tự do ta cần vẽ các biểu đồ  $(\bar{M}_1)$ ,  $(\bar{N}_1)$  và áp dụng các công thức (5.6), (5.11). Kết quả vẽ các biểu đồ như trên hình 5.22c, d.

Ta có:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \\ &= \frac{1}{EI} \left( \frac{1 \cdot l}{2} \cdot \frac{2l}{3} + 1 \cdot l \cdot l + \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2l}{3} \right) = \frac{5l^3}{3EI}. \end{aligned}$$

Khi tính  $\Delta_{1t}$ , để tránh sai lầm về dấu, nên quy định chiều nhìn của người quan sát nhằm phân định rõ phía trên và phía dưới để xác định dấu của các đại lượng  $t_2$ ,  $t_1$  và mômen uốn. Trong trường hợp này, nếu quy định người quan sát đứng ở bên trong khung, dấu hướng ra ngoài khung thì  $t_2 = +2t$ ;  $t_1 = t$  còn diện tích các biểu đồ mômen uốn mang dấu dương.

$$\begin{aligned} \Delta_{1t} &= \sum \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \Omega(\bar{M}_1) + \sum \alpha t_{cm} \Omega(\bar{N}_1) = \\ &= \frac{\alpha}{h} (2t - t) \left[ -\frac{1}{2} \cdot l \cdot l - l \cdot l - \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \right] + \alpha \frac{2t + t}{2} [-l \cdot l] = -\alpha t l \left( \frac{3}{2} + \frac{2l}{h} \right). \end{aligned}$$

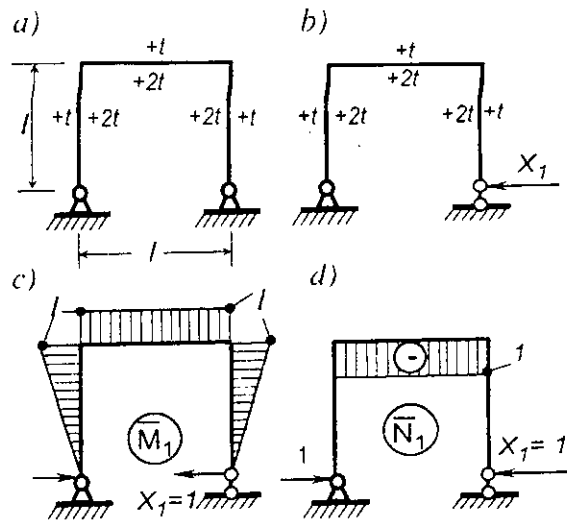
Thay các kết quả vào phương trình chính tắc, ta được:

$$X_1 = \frac{3EI\alpha t}{5l^2} \left( \frac{3}{2} + \frac{2l}{h} \right).$$

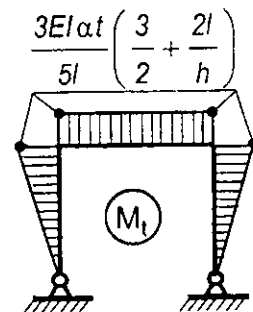
Vẽ biểu đồ mômen uốn theo biểu thức:

$$(M_1) = (\bar{M}_1) X_1.$$

Biểu đồ mômen uốn cần tìm vẽ trên hình 5.23. Để vẽ biểu đồ lực cắt và lực dọc ta cũng tiến



Hình 5.22



Hình 5.23

hành theo cách đã trình bày trong ví dụ 5.4.

**Nhận xét:** Biểu đồ mômen uốn trong hệ siêu tĩnh có thứ căng ở về phía có độ biến thiên nhiệt độ thấp. Thật vậy, sự biến thiên nhiệt độ có khuynh hướng gây ra biến dạng làm căng thứ có độ biến thiên nhiệt độ cao, nhưng mômen uốn là nội lực có khuynh hướng chống lại biến dạng đó nên căng về phía có độ biến thiên nhiệt độ thấp.

### C. Hệ siêu tĩnh có thanh chế tạo chiều dài không chính xác

**Ví dụ 5.7.** Vẽ biểu đồ mômen uốn trong khung siêu tĩnh trên hình 5.24 khi thanh  $AB$  có chiều dài bị chế tạo hụt là  $\Delta$ . Cho biết độ cứng khi kéo hoặc nén của thanh  $AB$  là  $EA = EI / 10l^2$ .

Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng một. Chọn hệ cơ bản như trên hình 5.24b.

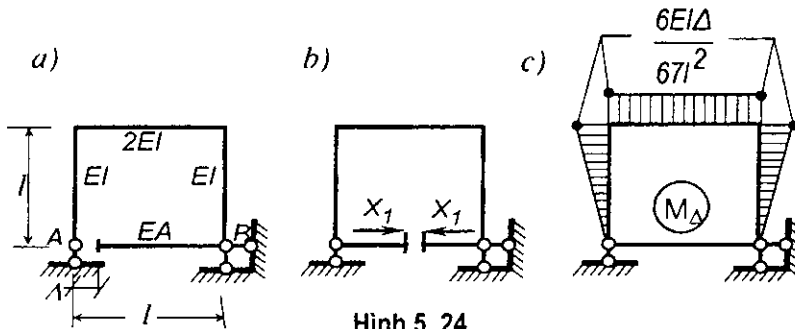
Phương trình chính tắc có dạng:  $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1\Delta} = 0$ .

Hệ này đã được khảo sát trong ví dụ 5.4 khi hệ chịu tải trọng, do đó ta có thể sử dụng một số số liệu đã có. Biểu đồ  $(\bar{M}_1)$  như trên hình 5.18c.

Hệ số chính có giá trị:  $\delta_{11} = \frac{67l^3}{6EI}$ .

Số hạng tự do  $\Delta_{1\Delta}$  biểu thị chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của các lực  $X_1$  do độ hụt  $\Delta$  của thanh  $AB$  gây ra trong hệ cơ bản.

Theo công thức (5.12):  $\Delta_{k\Delta} = \sum_i \bar{N}_{ik} \Delta_i$ ,



Hình 5.24

Trong trường hợp này  $i = 1$ ;  $\Delta_i = -\Delta$ ;  $\bar{N}_{i1} = 1$ . Do đó:  $\Delta_{1\Delta} = 1 \cdot (-\Delta) = -\Delta$ .

Nghiệm của phương trình chính tắc:  $X_1 = \frac{6EI\Delta}{67l^3}$ .

Biểu đồ mômen uốn trong hệ siêu tĩnh được xác định theo công thức:

$$(M_{\Delta}) = (\bar{M}_j) X_l.$$

Kết quả như trên hình 5.24c.

#### D. Hệ siêu tĩnh chịu chuyển vị cưỡng bức tại các liên kết tựa

**Ví dụ 5.8.** Cho khung siêu tĩnh chịu chuyển vị cưỡng bức tại các liên kết tựa như trên hình 5.25. Xác định các số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc.

Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng ba.

Ta sẽ xác định các số hạng tự do với hai cách chọn hệ cơ bản như sau:

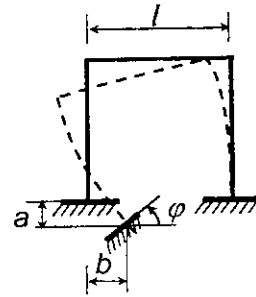
a) Chọn hệ cơ bản bằng cách cắt liên kết có chuyển vị (hình 5.26a).

Để xác định  $\Delta_{kZ}$ , ta cần tìm phản lực  $\bar{R}_{jk}$  tại các liên kết có chuyển vị cường bức do lực  $X_k = 1$  gây ra trong hệ cơ bản. Trên hình 5.26b, c, d cho kết quả tìm các phản lực nói trên (trên hình không vẽ các phản lực có giá trị bằng không). Áp dụng công thức (5.13) ta được:

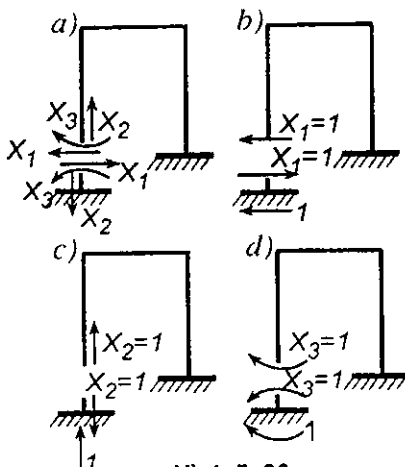
$$\Delta_{1Z} = -\sum_j \bar{R}_{j1} Z_j = -[-l \cdot b] = b;$$

$$\Delta_{2Z} = -\sum_j \bar{R}_{j2} Z_j = -[-l \cdot a] = a;$$

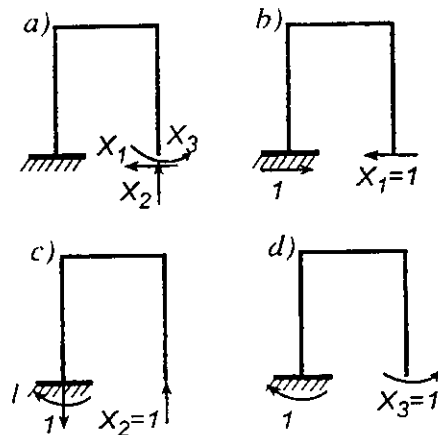
$$\Delta_{3Z} = -\sum_j \bar{R}_{j3} Z_j = -[-l \cdot \varphi] = \varphi.$$



Hình 5.25



Hình 5.26



Hình 5.27

b) Chọn hệ cơ bản bằng cách loại trừ liên kết thừa không có chuyển vị cưỡng bức (hình 5.27a).

Trên các hình 5.27b, c, d ghi kết quả tính các phản lực  $\bar{R}_{jk}$ . Theo công thức (5.13), ta có:

$$\Delta_{1Z} = -\sum_j \bar{R}_{j1} Z_j = -[1.b] = -b ;$$

$$\Delta_{2Z} = -\sum_j \bar{R}_{j2} Z_j = -[1.a - l.\varphi] = \varphi.l - a ;$$

$$\Delta_{3Z} = -\sum_j \bar{R}_{j3} Z_j = -[-l.\varphi] = \varphi .$$

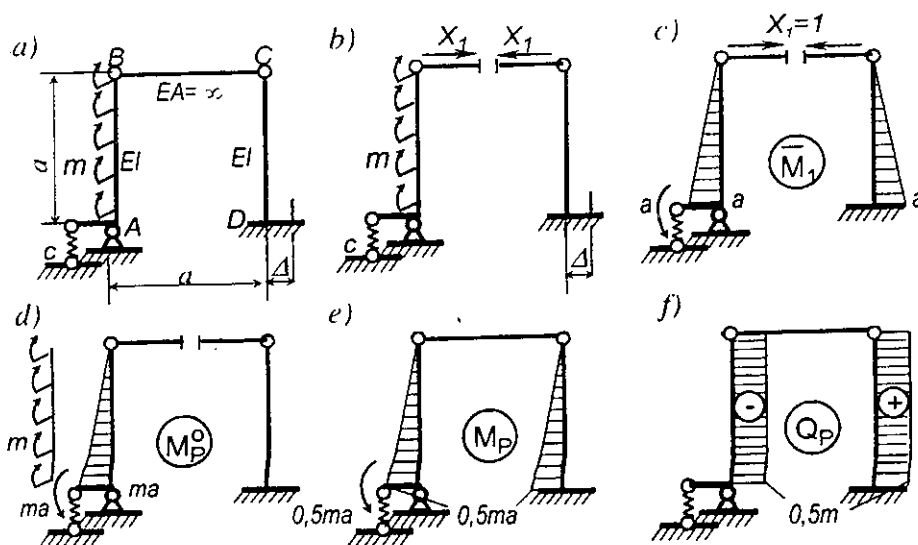
**Ví dụ 5.9.** Xét hệ cơ liên kết ngàm đàn hồi với hệ số đàn hồi  $c=3EI/a$  (hình 5.28a). Vẽ các biểu đồ nội lực khi hệ chịu tác dụng đồng thời của hai nguyên nhân:

- Mômen phân bố đều với cường độ  $m$  trên thanh  $AB$ .
- Ngàm  $D$  có chuyển vị cưỡng bức theo phương ngang, hướng về bên phải bằng  $\Delta = ma^3/6EI$ .

Cho biết: thanh  $BC$  có độ cứng khi kéo hoặc nén  $EA = \infty$ ; các thanh khác có  $EI = const$ .

Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh  $n=1$ . Chọn hệ cơ bản bằng cách cắt hoặc loại bỏ thanh  $BC$  có hai đầu khớp như trên hình 5.28b.

Phương trình chính tắc:  $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} + \Delta_{1Z} = 0$ .



Hình 5.28

Các biểu đồ mômen uốn lần lượt do  $X_I = I$  và tải trọng gây ra trong hệ cơ bản như trên hình 5.28c, d. Chú ý là thanh  $BC$  có độ cứng bằng vô cùng nên không bị biến dạng, ta có:

$$\delta_{II} = (\bar{M}_I)(\bar{M}'_I) + \frac{\bar{R}_{AI}\bar{R}_{AI}}{c} = \frac{2}{EI} \left[ \frac{a^2}{2} \times \frac{2a}{3} \right] + a.a. \frac{a}{3EI} = \frac{a^3}{EI};$$

$$\Delta_{IP} = (\bar{M}_I)(M''_P) + \frac{\bar{R}_{AI}R''_{AP}}{c} = -\frac{I}{EI} \left[ \frac{ma^2}{2} \times \frac{2a}{3} \right] - \frac{a.ma}{c} = -\frac{2ma^3}{3EI};$$

$$\Delta_{IZ} = -\sum_j \bar{R}_{jk} Z_j = -[I \cdot \Delta] = -\frac{ma^3}{6EI}.$$

Thay các kết quả vào phương trình chính tắc, ta được:  $X_I = -0,5m$ .

Vẽ biểu đồ mômen uốn. Từ biểu thức (5.16) ta có:

$$(M) = (\bar{M}_I)X_I + (M''_P).$$

Kết quả tìm được như trên hình 5.28e.

Để vẽ biểu đồ lực cắt theo các mômen uốn đã biết, ta vận dụng các công thức (5.18) với chú ý là thanh  $AB$  có chịu mômen phân bố, ta có:

- Thanh  $AB$ :  $Q_{AB} = Q_{BA} = tg\beta_{AB} - m = +(0,5ma)/a - m = -0,5m$ .
- Thanh  $BC$ :  $Q_{BC} = Q_{CB} = 0$ .
- Thanh  $CD$ :  $Q_{CD} = Q_{DC} = tg\beta_{CD} = +(0,5ma)/a = 0,5m$ .

Biểu đồ lực cắt tìm được như trên hình 5.28f.

Trong trường hợp này, thanh  $BC$  chịu lực dọc  $N_{BC} = -0,5m$  còn trong các thanh đứng không phát sinh lực dọc.

## E. Dàn siêu tĩnh

Trước khi thực hiện tính toán dàn siêu tĩnh, ta cần lưu ý một số đặc điểm của hệ dàn:

### 1. Bậc siêu tĩnh

Trong bài toán dàn, nên vận dụng trực tiếp các công thức (1.4) và (1.5) để xác định bậc siêu tĩnh.

$$\rightarrow \text{Đối với hệ dàn không nối với đất} \quad n = D + 3 - 2M; \quad (5.20)$$

$$\rightarrow \text{Đối với hệ dàn nối với đất} \quad n = D + C - 2M, \quad (5.21)$$

trong đó:

$n$  – bậc siêu tĩnh;

$D$  – số thanh trong dàn;

$C$  – số liên kết tựa tương đương loại một;  $M$  – số mắt dãn.

## 2. Hệ phương trình chính tắc

Hệ phương trình chính tắc vẫn có dạng (5.3). Song các công thức xác định các hệ số và số hạng tự do đơn giản hơn vì các thanh trong dãn chỉ chịu lực dọc. Để lập các công thức ta giả thiết hệ dãn có liên kết đàn hồi và hệ cơ bản được chọn là tĩnh định.

### \* Các hệ số

$$\delta_{km} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} \bar{N}_{im}}{(EA)_i} l_i + \sum_j \frac{l}{c_j} \bar{R}_{jk} \bar{R}_{jm}, \quad (5.22)$$

trong đó:

$\bar{N}_{ik}$  và  $\bar{N}_{im}$  – lực dọc trong thanh thứ  $i$  do các ản  $X_k=1$  và  $X_m=1$  gây ra trong hệ cơ bản;

$\bar{R}_{jk}$  và  $\bar{R}_{jm}$  – phản lực trong liên kết đàn hồi thứ  $j$  do các ản  $X_k=1$  và  $X_m=1$  gây ra trong hệ cơ bản.

### \* Các số hạng tự do

#### ❖ Do tải trọng

$$\Delta_{kP} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} N_{iP}^o}{(EA)_i} l_i + \sum_j \frac{l}{c_j} \bar{R}_{jk} R_{jP}^o, \quad (5.23)$$

$N_{iP}^o$  – lực dọc trong thanh thứ  $i$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản;

$R_{jP}^o$  – phản lực trong liên kết đàn hồi thứ  $j$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

#### ❖ Do sự thay đổi nhiệt độ

Áp dụng (5.10) cho trường hợp các thanh trong hệ chỉ chịu lực dọc, ta có:

$$\Delta_{kt} = \sum_i \alpha t_{ci} \Omega(\bar{N}_k) = \sum_i \alpha t_{ci} l_i \bar{N}_k, \quad (5.24)$$

trong đó  $t_{ci}$  – độ biến thiên nhiệt độ ở trục thanh thứ  $i$ .

#### ❖ Do chế tạo chiều dài thanh không chính xác. Theo (5.12):

$$\Delta_{k\Delta} = \sum_i \bar{N}_{ik} \Delta_i, \quad (5.25)$$



$\Delta_i$  – độ dôi của thanh thứ  $i$ .

❖ Do chuyển vị cưỡng bức tại các liên kết tựa. Theo (5.13):

$$\Delta_{kZ} = -\sum_j \bar{R}_{jk} Z_j. \quad (5.26)$$

trong đó:

$Z_j$  – chuyển vị cưỡng bức tại gối tựa thứ  $j$ ;

$\bar{R}_{jk}$  – phản lực tại gối  $j$  do lực  $X_k=I$  gây ra trong hệ cơ bản.

**Chú ý:** Dấu tổng trong các công thức (5.22), (5.23), (5.24), (5.25) áp dụng cho tất cả các thanh trong dàn, kể cả các thanh bị cắt khi chọn hệ cơ bản. Dấu tổng trong (5.26) áp dụng cho các gối tựa có chuyển vị cưỡng bức.

### 3. Xác định nội lực trong dàn siêu tĩnh

Lực dọc trong thanh thứ  $i$  của dàn siêu tĩnh được xác định theo biểu thức sau:

$$N_i = \bar{N}_{i1} X_1 + \bar{N}_{i2} X_2 + \dots + \bar{N}_{in} X_n + N_{iP}^o + N_{it}^o + N_{i\Delta}^o + N_{iZ}^o, \quad (5.27)$$

trong đó  $N_{iP}^o, N_{it}^o, N_{i\Delta}^o, N_{iZ}^o$  – lực dọc trong thanh thứ  $i$  lần lượt do các nguyên nhân  $P, t, \Delta$  và  $Z$  gây ra trong hệ cơ bản.

Nếu hệ cơ bản là tĩnh định thì:

$$N_i = \bar{N}_{i1} X_1 + \bar{N}_{i2} X_2 + \dots + \bar{N}_{in} X_n + N_{iP}^o. \quad (5.28)$$

**Ví dụ 5.10.** Cho dàn siêu tĩnh chịu tải trọng như trên hình 5.29a. Yêu cầu xác định lực dọc trong các thanh 2-8, 2-3 và 2-9. Cho biết  $EA = const$ .

1) *Tìm bậc siêu tĩnh.* Áp dụng công thức (5.21) cho trường hợp này ta có:

$$D = 21; C = 3; M = 10. \text{ Do đó: } n = 21 + 3 - 2 \cdot 10 = 4.$$

2) *Chọn hệ cơ bản.* Vì hệ đối xứng và tải trọng tác dụng cũng đối xứng cho nên nếu chọn hệ cơ bản đối xứng và dùng các cặp ẩn đối xứng thì phương trình chính tắc và số ẩn chỉ còn hai. Với hệ cơ bản chọn như trên hình 5.29b, nội lực ở các trạng thái đơn vị chỉ phân bố cục bộ trong từng khoang dàn.

3) *Hệ phương trình chính tắc:*

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

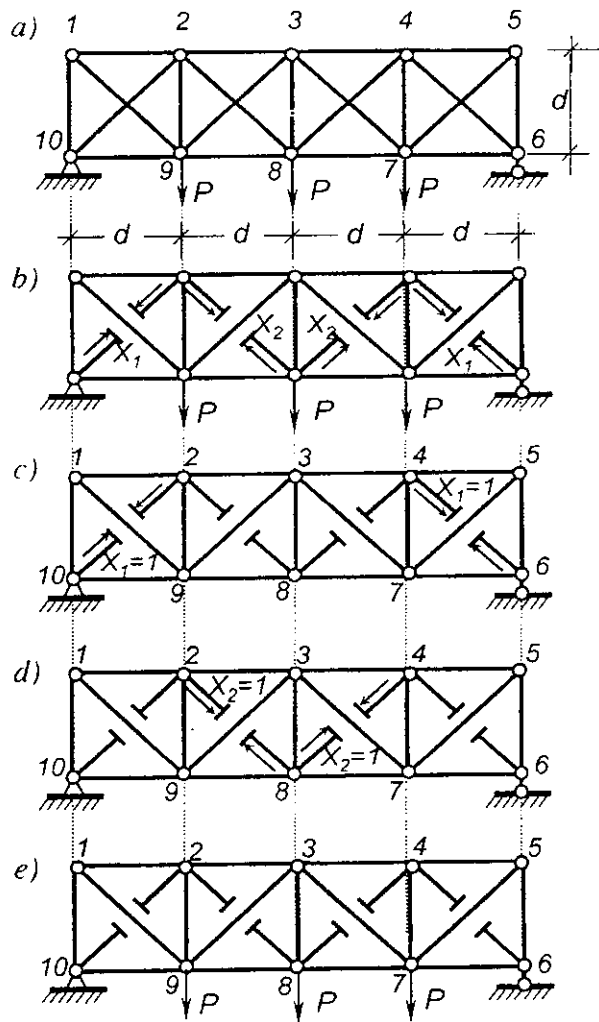
Để xác định các hệ số và số hạng tự do ta cần tính nội lực do các cặp lực  $X_1, X_2$  và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản. Sơ đồ tính những nội lực này lần lượt vẽ trên hình 5.29c, d, e.

Theo (5.22) và (5.23) đồng thời chú ý là  $EA=const$ , ta có:

$$\delta_{km} = \frac{1}{EA} \sum_i \bar{N}_{ik} \bar{N}_{im} l_i$$

$$\Delta_{km} = \frac{1}{EA} \sum_i \bar{N}_{ik} N_{ip}^o l_i$$

Các khâu tính toán được thực hiện trên bảng 5.2. Vì dàn đối xứng và tải trọng cũng đối xứng nên chỉ cần tính với nửa hệ rồi nhân đôi kết quả. Để tiện tính toán ta chia đôi kết quả tính của thanh 3-8 trước, sau đó chỉ cần nhân đôi kết quả tổng cộng. Có thể thực hiện điều này bằng cách chia đôi chiều dài của thanh 3-8.



Hình 5.29

Trên cột 1 ghi tên các thanh. Trên cột 2 ghi chiều dài các thanh. Trên cột 3, 4 và 5 lần lượt ghi nội lực trong các thanh do lực  $X_1=1, X_2=1$  và do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản. Để xác định những nội lực này ta vận dụng phương pháp tách mắt hoặc mặt cắt đã biết.

Trên các cột 6, 7 và 8 lần lượt tính các tích số  $(\bar{N}_{i1})^2 l_i, (\bar{N}_{i2})^2 l_i, (\bar{N}_{i1} \bar{N}_{i2}) l_i$  cho từng thanh để phục vụ cho việc tìm  $\delta_{11}, \delta_{12}$  và  $\delta_{22}$ . Lấy tổng kết quả tính trong những cột này rồi nhân với thừa số  $2/EA$  ta được:

**Bảng 5.2**

Thanh	$l_i$	$\bar{N}_{i1}$	$\bar{N}_{i2}$	$N_{iP}^o$	$\bar{N}_{i1} \bar{N}_{i1} l_i$	$\bar{N}_{i2} \bar{N}_{i2} l_i$	$\bar{N}_{i1} \bar{N}_{i2} l_i$	$\bar{N}_{i1} N_{iP}^o l_i$	$\bar{N}_{i2} N_{iP}^o l_i$
1-2	$d$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$0$	$-\frac{3}{2}P$	$\frac{1}{2}d$	$0$	$0$	$\frac{3\sqrt{2}}{4}Pd$	$0$
2-3	$d$	$0$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3}{2}P$	$0$	$\frac{1}{2}d$	$0$	$0$	$\frac{3\sqrt{2}}{4}Pd$
1-10	$d$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$0$	$-\frac{3}{2}P$	$\frac{1}{2}d$	$0$	$0$	$\frac{3\sqrt{2}}{4}Pd$	$0$
2-9	$d$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$0$	$\frac{1}{2}d$	$\frac{1}{2}d$	$\frac{1}{2}d$	$0$	$0$
1-9	$\sqrt{2}d$	$1$	$0$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}P$	$\sqrt{2}d$	$0$	$0$	$3Pd$	$0$
10-2	$\sqrt{2}d$	$1$	$0$	$0$	$\sqrt{2}d$	$0$	$0$	$0$	$0$
2-8	$\sqrt{2}d$	$0$	$1$	$0$	$0$	$\sqrt{2}d$	$0$	$0$	$0$
9-3	$\sqrt{2}d$	$0$	$1$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}P$	$0$	$\sqrt{2}d$	$0$	$0$	$-Pd$
10-9	$d$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$0$	$0$	$\frac{1}{2}d$	$0$	$0$	$0$	$0$
9-8	$d$	$0$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2P$	$0$	$\frac{1}{2}d$	$0$	$0$	$-\sqrt{2}Pd$
3-8	$\frac{1}{2}d$	$0$	$-\sqrt{2}$	$P$	$0$	$d$	$0$	$0$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}Pd$
$\Sigma$					$2(1+\sqrt{2})d$	$(2,5+2\sqrt{2})d$	$\frac{1}{2}d$	$3(1+\frac{\sqrt{2}}{2})Pd$	$-(1+\frac{3\sqrt{2}}{4})Pd$

$$\delta_{11} = 4(1 + \sqrt{2}) \frac{d}{EA} = 9,656 \frac{d}{EA}; \quad \delta_{22} = (5 + 4\sqrt{2}) \frac{d}{EA} = 10,656 \frac{d}{EA};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{d}{EA}.$$

Trên các cột 9, 10 ta xác định các tích số  $\bar{N}_{i1} N_{iP}^o l_i$  và  $\bar{N}_{i2} N_{iP}^o l_i$  cho từng thanh để phục vụ cho việc tính  $\Delta_{1P}$  và  $\Delta_{2P}$ . Lấy tổng các kết quả tính trong các cột rồi nhân với thừa số  $2/EA$  ta được:

$$\Delta_{1P} = 3(2 + \sqrt{2}) \frac{Pd}{EA} = 10,242 \frac{Pd}{EA}; \quad \Delta_{2P} = -(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}) \frac{Pd}{EA} = -4,120 \frac{Pd}{EA}.$$

Thay các giá trị của  $\delta_{km}$  và  $\Delta_{kP}$  vào hệ phương trình chính tắc ta được:

$$9,656 X_1 + X_2 + 10,242 P = 0; \quad X_1 + 10,656 X_2 - 4,120 P = 0.$$

Nghiệm của hệ phương trình:  $X_1 = -1,11P$ ;  $X_2 = 0,49P$ .

4) *Xác định nội lực.* Áp dụng công thức (5.28) đồng thời sử dụng kết quả tính các  $\bar{N}_{i1}$ ,  $\bar{N}_{i2}$  và  $N_{iP}^0$  trên bảng 5.2 ta có:

$$N_{28} = 0.(-1,11P) + 1.(0,49P) - 0 = 0,49P;$$

$$N_{23} = 0.(-1,11P) - \frac{\sqrt{2}}{2}(0,49P) - \frac{3}{2}P = -1,85P;$$

$$N_{29} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.(-1,11P) - \frac{\sqrt{2}}{2}(0,49P) + 0 = 0,44P.$$

### F. Hệ liên hợp siêu tĩnh

Hệ liên hợp siêu tĩnh tuy đa dạng nhưng về cách tính theo phương pháp lực thì cũng tương tự như nhau. Ta sẽ tìm hiểu cách tính hệ liên hợp siêu tĩnh theo phương pháp lực thông qua trường hợp hệ dầm cứng - vòm dẻo.

*Ví dụ 5.11.* Trình bày nguyên tắc tính hệ dầm cứng-vòm dẻo trên hình 5.30a.

Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng một. Chọn hệ cơ bản bằng cách cắt thanh chịu nén ở giữa nhịp (hình 5.30b). Phương trình chính tắc có dạng:

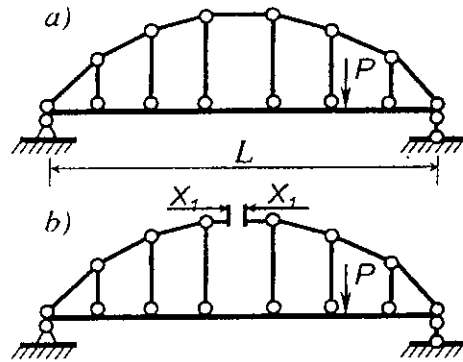
$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0,$$

trong đó:

✦  $\delta_{11}$  – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $X_1$  do lực  $X_1=1$  gây ra trong hệ cơ bản.

Chuyển vị này bao gồm ba thành phần:

- Do biến dạng dọc trục trong những thanh thuộc hệ vòm dẻo và trong những thanh chống đứng. Nếu gọi  $\bar{N}_{i1}$  là lực dọc trong thanh thứ  $i$  của hệ vòm dẻo hoặc hệ thanh chống đứng do lực  $X_1=1$  gây ra trong hệ cơ bản thì thành phần này sẽ bằng  $\sum (\bar{N}_{i1})^2 l_i / (EA)_i$ . Trong đó  $l_i$  và  $A_i$  là chiều dài và diện tích tiết diện của thanh thứ  $i$ . Dấu tổng áp dụng cho tất cả các thanh thuộc hệ thống nói trên.



Hình 5.30

- Do biến dạng uốn của dầm dưới tác dụng của lực  $X_I = 1$ . Nếu gọi  $(\bar{M}_I)$  là biểu đồ mômen uốn trong dầm do lực  $X_I = 1$  gây ra trong hệ cơ bản thì thành phần này sẽ là  $(\bar{M}_I) (\bar{M}_I)$ .
- Do biến dạng nén của dầm dưới tác dụng của lực xô. Từ hình 5.30b ta thấy lực xô do  $X_I = 1$  gây ra bằng  $1$ , do đó áp dụng công thức chuyển vị ta sẽ xác định được thành phần này bằng  $1 \cdot 1L / (EA)_{dầm}$ .

Vậy: 
$$\delta_{II} = \sum_i \frac{\bar{N}_{iI}^2 l_i}{EA_i} + (\bar{M}_I) (\bar{M}_I) + \frac{L}{(EA)_{dầm}}$$

- ✦  $\Delta_{IP}$  – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $X_I$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

Chuyển vị này chỉ bao gồm thành phần do biến dạng uốn của dầm nếu tải trọng tác dụng vuông góc với trục dầm. Hai thành phần còn lại bằng không vì tải trọng tác dụng trên hệ cơ bản không gây ra lực dọc trong các thanh thuộc hệ vòm dẹt, hệ thanh chống đứng và trong dầm. Nếu gọi  $(M_P^o)$  là biểu đồ mômen uốn trong dầm do tải trọng tác dụng trên hệ cơ bản thì

$$\Delta_{IP} = (\bar{M}_I) (M_P^o).$$

Sau khi tìm được  $X_I$ , có thể xác định nội lực trong hệ liên hợp theo công thức chung đã thiết lập trong 5.2. Trong trường hợp này, ta có:

- ❖ Nội lực tại tiết diện  $k$  trong dầm cứng:

$$M_k = \bar{M}_{kI} X_I + M_k^o; \quad Q_k = \bar{Q}_{kI} X_I + Q_k^o; \quad N_k = \bar{N}_{kI} X_I,$$

trong đó:

$\bar{M}_{kI}, \bar{Q}_{kI}, \bar{N}_{kI}$  – nội lực tại tiết diện  $k$  của dầm cứng do lực  $X_I = 1$  gây ra trong hệ cơ bản;

$M_k^o, Q_k^o$  – nội lực tại tiết diện  $k$  của dầm cứng do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

- ❖ Lực dọc trong thanh thứ  $i$  thuộc hệ vòm dẹt hoặc hệ thanh chống đứng

$$N_i = \bar{N}_{iI} X_I,$$

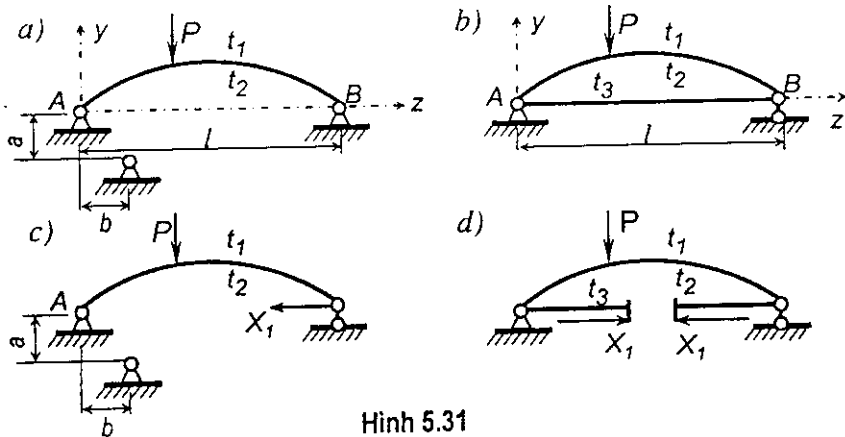
$\bar{N}_{iI}$  – lực dọc trong thanh thứ  $i$  do lực  $X_I = 1$  gây ra trong hệ cơ bản.

## G. Vòm siêu tĩnh

**Ví dụ 5.12.** Trình bày cách tính vòm hai khớp (hình 5.31a) và hệ vòm hai khớp có thanh căng (hình 5.31b) chịu các nguyên nhân: tải trọng, sự thay đổi nhiệt độ, chuyển vị gối tựa.

Hệ có bậc siêu tĩnh bằng một. Chọn hệ cơ bản của vòm hai khớp như trên hình 5.31c. Hệ cơ bản của vòm hai khớp có thanh căng chọn bằng cách cắt thanh căng như trên hình 5.31d.

Phương trình chính tắc:  $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} + \Delta_{1t} + \Delta_{1Z} = 0$ .



Hình 5.31

1) Xác định  $\delta_{11}$  theo (5.5):

$$\delta_{11} = \sum \int \bar{M}_l^2 \frac{ds}{EI} + \sum \int \bar{N}_l^2 \frac{ds}{EA} + \sum \int \nu \bar{Q}_l^2 \frac{ds}{GA}$$

a) Trường hợp vòm hai khớp có thanh căng: Các nội lực do lực  $X_1=l$  gây ra trong hệ cơ bản bao gồm

- Nội lực trong vòm:  $\bar{M}_l = -l.y$ ;  $\bar{N}_l = -l.\cos\varphi$ ;  $\bar{Q}_l = -l.\sin\varphi$ .
- Nội lực trong thanh căng:  $\bar{N}_l^{tc} = l$ .

Do đó:

$$\delta_{11} = \int_0^l y^2 \frac{dz}{EI \cos\varphi} + \int_0^l \cos\varphi \frac{dz}{EA} + \int_0^l \nu \sin^2\varphi \frac{dz}{GA \cos\varphi} + \frac{l}{(EA)_{tc}}$$

trong đó  $(EA)_{tc}$  – độ cứng của thanh căng khi chịu kéo.

b) Trường hợp vòm hai khớp: Có thể xem vòm hai khớp như trường hợp đặc biệt của vòm hai khớp có thanh căng với  $(EA)_{tc} = \infty$ . Do đó ta có:



$$\delta_{11} = \int_0^l y^2 \frac{dz}{EI \cos \varphi} + \int_0^l \cos \varphi \frac{dz}{EA} + \int_0^l \nu \sin^2 \varphi \frac{dz}{GA \cos \varphi}.$$

2) *Xác định  $\Delta_{1P}$ .* Đối với cả hai loại vòm, số hạng này đều được xác định theo công thức (5.9):

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{(-y)M_P^0 dz}{EI \cos \varphi} + \sum \int \frac{(-\cos \varphi)N_P^0 dz}{EA \cos \varphi} + \sum \int \nu \frac{(-\sin \varphi)Q_P^0 dz}{GA \cos \varphi}.$$

3) *Xác định  $\Delta_{1t}$ .* Giả sử nhiệt độ biến thiên như nhau dọc theo chiều dài vòm và thanh căng. Gọi  $t_1$  và  $t_2$  là độ biến thiên nhiệt độ ở các thớ trên và thớ dưới của vòm;  $t_3$  là độ biến thiên nhiệt độ ở trên thanh căng.

Áp dụng công thức (5.10) cho trường hợp này, ta có:

$$\Delta_{1t} = \sum \int \bar{M}_1 \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) ds + \sum \int \bar{N}_1 \alpha t_c ds.$$

a) *Trường hợp vòm hai khớp có thanh căng:*

$$\Delta_{1t} = \int_0^l \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) (-y) \frac{dz}{\cos \varphi} - \int_0^l \cos \varphi \alpha t_c \frac{dz}{\cos \varphi} + \int_0^l l \alpha_{tc} t_3 dz.$$

Hay 
$$\Delta_{1t} = - \int_0^l \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \frac{y dz}{\cos \varphi} - \alpha t_c l + \alpha_{tc} t_3 l.$$

trong đó  $\alpha_{tc}$  - hệ số dãn nở vì nhiệt của vật liệu làm thanh căng.

b) *Trường hợp vòm hai khớp.* Lúc này số hạng cuối của biểu thức trên không tồn tại, ta có

$$\Delta_{1t} = - \int_0^l \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \frac{y dz}{\cos \varphi} - \alpha t_c l.$$

Trường hợp đặc biệt khi nhiệt độ thay đổi đều như nhau trên toàn vòm với giá trị  $t$  ta có:

- Trong vòm hai khớp có thanh căng:  $\Delta_{1t} = -\alpha t l + \alpha_{tc} t l.$
- Trong vòm hai khớp:  $\Delta_{1t} = -\alpha t l.$

4) *Xác định  $\Delta_{1Z}$ .* Theo (5.13): 
$$\Delta_{1Z} = - \sum_j \bar{R}_{jk} Z_{jm}.$$

a) *Trường hợp vòm hai khớp có thanh căng.* Ta dễ dàng nhận thấy số hạng  $\Delta_{1Z}$  trong trường hợp này bằng không. Cần chú ý là vòm hai khớp có thanh căng là hệ siêu tĩnh nội, nên các gối tựa chuyển vị cưỡng bức không gây ra nội lực trong vòm.

b) Trường hợp vòm hai khớp

- Khi gối tựa A chuyển vị đứng với giá trị  $a$  (hình 5.32a).

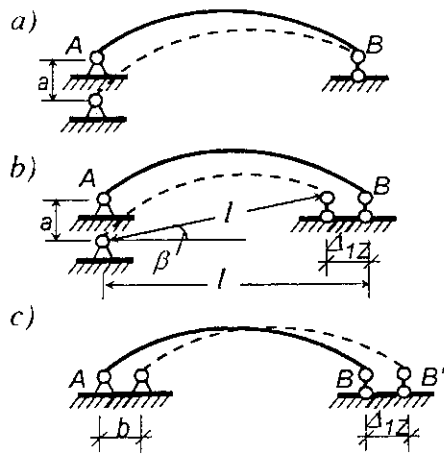
Nếu chuyển vị  $a$  là nhỏ thì theo (5.13) ta có  $\Delta_{IZ}=0$ .

Nếu chuyển vị  $a$  khá lớn thì  $\Delta_{IZ}$  sẽ tồn tại (hình 5.32b) vì gối B sẽ chuyển dời tới vị trí  $B'$  và ta có thể xác định bằng hình học như sau:

$$\Delta_{IZ} = l(1 - \cos\beta) = l - \sqrt{l^2 - a^2}$$

- Khi gối A chuyển vị ngang với giá trị  $b$  (hình 5.32c). Theo (5.13) hoặc cũng xác định bằng hình học, ta được:

$$\Delta_{IZ} = -(l \cdot b) = -b$$



Hình 5.32

5) *Xác định nội lực.* Sau khi giải phương trình chính tắc để tìm  $X_I$  ta có thể xác định nội lực trong vòm theo các biểu thức sau:

$$M = -y X_I + M_p^o; \quad N = -\cos\varphi X_I + N_p^o; \quad Q = -\sin\varphi X_I + Q_p^o,$$

trong đó:

$M, N, Q$  – các biểu thức giải tích của nội lực do các nguyên nhân gây ra trong vòm siêu tĩnh;

$M_p^o, N_p^o, Q_p^o$  – các biểu thức giải tích của nội lực do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

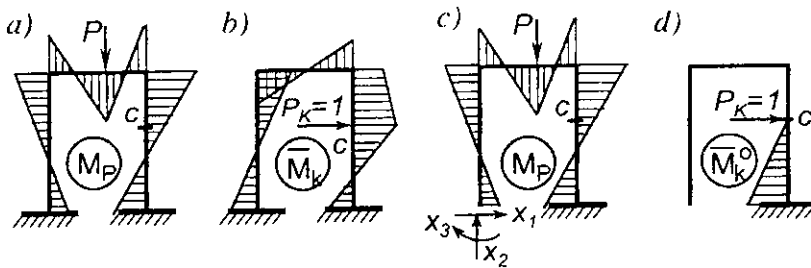
Nội lực trong thanh căng (nếu có) được xác định bằng ẩn  $X_I$ :  $N_{tc} = X_I$ .

## 5.4. Cách xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh

Công thức chuyển vị Maxwell – Mohr là tổng quát, áp dụng cho hệ siêu tĩnh cũng như tĩnh định. Khi sử dụng công thức này ta cần quan niệm hệ tương ứng với hai trạng thái: trạng thái "m" là trạng thái thực của hệ, trạng thái "k" là trạng thái khả dĩ tạo ra bằng cách đặt một lực  $P_k = 1$  có vị trí và phương tương ứng với chuyển vị cần tìm. Ngoài ra cần chú ý là trạng thái "k" phải xảy ra trên hệ giống như hệ đã cho.

Như vậy, muốn tìm chuyển vị trong hệ siêu tĩnh theo công thức (4.25) hoặc (4.33) ta cần:

- ✦ Tính trạng thái "m" tức là tính hệ siêu tĩnh cho ban đầu (hình 5.33a).
- ✦ Tính trạng thái "k" tức là tính hệ siêu tĩnh đó một lần nữa với lực  $P_k=1$ . Trên hình 5.33b vẽ trạng thái "k" với giả thiết cần tìm chuyển vị ngang tại C.



Hình 5.33

Do đó, để tính một chuyển vị nào đó trong hệ siêu tĩnh ta cần phải tính hệ siêu tĩnh hai lần với hai nguyên nhân khác nhau. Khối lượng tính toán sẽ nặng nề.

Dưới đây ta sẽ nghiên cứu một cách khác đơn giản hơn.

### A. Trường hợp hệ siêu tĩnh chịu tải trọng

Ta sẽ chứng minh:

Để xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh chịu tải trọng ta cần:

- ✦ Tính trạng thái "m" tức là tính hệ siêu tĩnh cho ban đầu.
- ✦ Tính trạng thái "k". Trạng thái này chỉ cần thực hiện trên một hệ cơ bản bất kỳ suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho.
- ✦ Áp dụng các công thức chuyển vị đã biết ở chương 4. Nghĩa là:

$$\Delta_{kP} = (M_P)(\bar{M}_k^o) + \sum_j \bar{R}_{jk}^o \frac{R_{jP}}{c_j} \quad (5.29)$$

trong đó:

$(M_P), (R_{jP})$  – biểu đồ mômen uốn và phản lực tại liên kết đàn hồi thứ  $j$  do tải trọng gây ra trong hệ siêu tĩnh ban đầu;

$(\bar{M}_k^o), (\bar{R}_{jk}^o)$  – biểu đồ mômen uốn và phản lực tại liên kết đàn hồi thứ  $j$  do lực  $P_k=1$  có vị trí và phương tương ứng với chuyển vị cần

tìm, gây ra trong hệ cơ bản bất kỳ suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho.

Để cho đơn giản, từ đây về sau ta chỉ viết công thức chuyển vị cho trường hợp dầm và khung đồng thời biểu thị theo cách nhân biểu đồ; điều này không ảnh hưởng gì đến các kết luận chung.

Để chứng minh, ta xét hệ siêu tĩnh cho trên hình 5.33a. Giả sử chọn hệ cơ bản như trên hình 5.33c. So sánh hai hệ  $a)$  và  $c)$  ta thấy: nếu các lực  $X_1, X_2$  và  $X_3$  là nghiệm của hệ phương trình chính tắc khi tính hệ siêu tĩnh  $a)$  theo hệ cơ bản  $c)$ , thì hai hệ này sẽ làm việc hoàn toàn giống nhau nghĩa là nội lực, biến dạng chuyển vị trong hai hệ hoàn toàn như nhau. Do đó, muốn xác định chuyển vị trong hệ  $a)$ , ta chỉ cần xác định chuyển vị trong hệ cơ bản  $c)$ . Để tìm chuyển vị trong hệ  $c)$  ta cần tạo trạng thái "k" trên hệ tương ứng với hệ  $c)$  (hình 5.33d) tức là trên hệ cơ bản. Đó là điều cần chứng minh.

**Chú ý:**

1. Vì có thể tạo trạng thái "k" trên hệ cơ bản bất kỳ suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho, nên hệ cơ bản này có thể chọn khác với hệ cơ bản đã dùng khi tìm  $(M_P)$ . Nên chọn hệ cơ bản sao cho biểu đồ  $\bar{M}_k^o$  đơn giản để nhân biểu đồ được dễ dàng.

2. Cũng có thể chứng minh được:

$$\Delta_{kP} = (M_P^o)(\bar{M}_k) + \sum_j R_{jP}^o \frac{\bar{R}_{jk}}{c_j}, \quad (5.30)$$

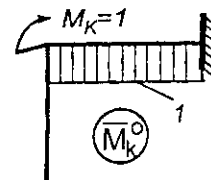
$(M_P^o), (R_{jP}^o)$  – biểu đồ mômen uốn và phản lực tại liên kết đàn hồi thứ  $j$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản;

$(\bar{M}_k), (\bar{R}_{jk})$  – biểu đồ mômen uốn và phản lực tại liên kết đàn hồi thứ  $j$  do lực  $P_k=1$  có vị trí và phương tương ứng với chuyển vị cần tìm, gây ra trong hệ siêu tĩnh ban đầu.

**Ví dụ 5.13.** Xác định góc xoay tại nút của khung đã xét trong ví dụ 5.3.

Trong ví dụ 5.3 ta đã vẽ được biểu đồ  $(M_P)$  của hệ (hình 5.17f).

Để xác định góc xoay ở nút ta chỉ cần tạo trạng thái "k" trên hệ cơ bản suy ra từ siêu tĩnh đã cho và vẽ biểu đồ  $(\bar{M}_k^o)$  (hình 5.34). Nhân biểu đồ  $(M_P)$  với biểu đồ  $(\bar{M}_k^o)$ , ta được:



Hình 5.34

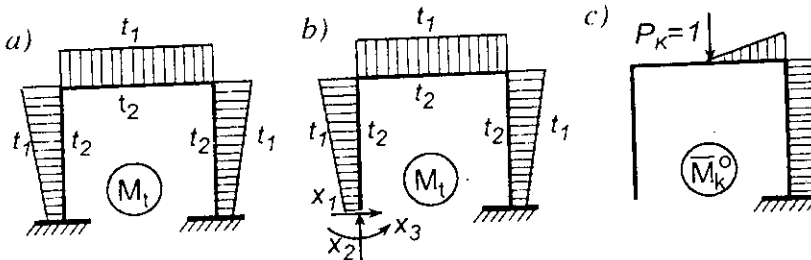
$$\varphi = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1}{2} \frac{qa^2}{14} \cdot a.l + \frac{1}{2} \frac{qa^2}{28} \cdot a.l \right] = -\frac{qa^3}{56EI}$$

Góc xoay cần tìm quay ngược chiều kim đồng hồ.

### B. Trường hợp hệ siêu tĩnh chịu biến thiên nhiệt độ, chế tạo chiều dài các thanh không chính xác, chuyển vị gối tựa

Ta vận dụng cách lập luận tương tự như trên để nghiên cứu chuyển vị trong trường hợp này.

Xét khung siêu tĩnh chịu tác dụng của sự biến thiên nhiệt độ (hình 5.35a).



Hình 5.35

Giả sử khi tính nội lực ta chọn một hệ cơ bản bất kỳ suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho như trên hình 5.35b. Nếu các lực  $X$  là nghiệm của hệ phương trình chính tắc thì hệ  $b)$  sẽ làm việc giống như hệ  $a)$ . Do đó, muốn tìm chuyển vị trong hệ  $a)$  ta chỉ cần tìm chuyển vị trong hệ  $b)$  và trạng thái "k" cần tạo ra khi xác định chuyển vị của hệ  $b)$  có thể thực hiện trên hệ cơ bản (hình 5.35c).

Chuyển vị trong hệ  $b)$  do hai nguyên nhân gây ra:

✦ *Do các ẩn số  $X$* : Vì nội lực do các lực  $X$  gây ra chính là nội lực trong hệ siêu tĩnh nên thành phần chuyển vị này bằng  $(\bar{M}_k^o)(M_t) + \sum_j \bar{R}_{jk}^o \frac{R_{jt}}{c_j}$ .

✦ *Do nhiệt độ*: Cần chú ý rằng nhiệt độ chỉ không gây ra nội lực trong hệ cơ bản tĩnh định nhưng vẫn gây ra chuyển vị. Gọi  $\Delta_{kt}^o$  là thành phần chuyển vị do thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản.

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có:

$$\Delta_{kt} = (M_t)(\bar{M}_k^o) + \sum_j \bar{R}_{jk}^o \frac{R_{jt}}{c_j} + \Delta_{kt}^o, \quad (5.31)$$

$$\text{với} \quad \Delta_{ki}^o = \sum \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \Omega(\bar{M}_k^o) + \sum \alpha_c \Omega(\bar{N}_k^o),$$

trong đó:

$(M_j), R_{jt}$  – biểu đồ mômen uốn và phản lực tại liên kết đàn hồi thứ  $j$  do sự thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ siêu tĩnh ban đầu;

$\Omega(\bar{M}_k^o), \Omega(\bar{N}_k^o)$  – diện tích biểu đồ mômen uốn và biểu đồ lực dọc trong các thanh của hệ ở trạng thái "k" được tạo ra trong hệ cơ bản tĩnh định tương ứng với hệ cơ bản tĩnh định đã chọn khi xác định thành phần thứ nhất của công thức (5.31).

Cũng lập luận tương tự như vậy ta có:

❖ Trường hợp hệ có các thanh chế tạo chiều dài không chính xác:

$$\Delta_{k\Delta} = (M_{\Delta})(\bar{M}_k^o) + \sum_j \bar{R}_{jk}^o \frac{R_{j\Delta}}{c_j} + \Delta_{k\Delta}^o, \quad (5.32)$$

$$\text{với} \quad \Delta_{k\Delta}^o = \sum_i \bar{N}_{ik}^o \Delta_i;$$

❖ Trường hợp hệ chịu chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa:

$$\Delta_{kZ} = (M_Z)(\bar{M}_k^o) + \sum_j \bar{R}_{jk}^o \frac{R_{jZ}}{c_j} + \Delta_{kZ}^o, \quad (5.33)$$

$$\text{với} \quad \Delta_{kZ}^o = -\sum_j \bar{R}_{jk}^o Z_j.$$

Trong (5.32) và (5.33):

$(M_{\Delta}), R_{j\Delta}$  – biểu đồ mômen uốn và phản lực tại liên kết đàn hồi thứ  $j$  do sự chế tạo chiều dài không chính xác gây ra trong hệ siêu tĩnh ban đầu;

$(M_Z), R_{jZ}$  – biểu đồ mômen uốn và phản lực tại liên kết đàn hồi thứ  $j$  do chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa gây ra trong hệ siêu tĩnh ban đầu;

$\bar{N}_{ik}^o, \bar{R}_{jk}^o$  – lực dọc trong thanh thứ  $i$  và phản lực tại gối thứ  $j$  của hệ ở trạng thái "k" được tạo ra trong hệ cơ bản tĩnh định tương ứng với hệ cơ bản tĩnh định đã chọn khi xác định thành phần thứ nhất của các công thức (5.32) và (5.33).

**Ví dụ 5.14.** Xác định độ võng tại giữa nhịp thanh ngang của khung đã xét ở ví dụ 5.6.

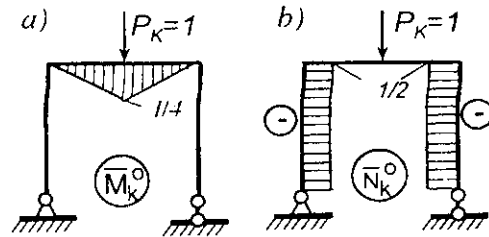
Nguyên nhân gây ra chuyển vị trong khung là nhiệt độ, do đó ta sử dụng công thức (5.31) để xác định chuyển vị cần tìm.



Thứ tự thực hiện như sau:

1) Vẽ biểu đồ ( $M_1$ ). Bài toán này đã được khảo sát trong ví dụ 5.6, kết quả tìm được như trên hình 5.23.

2) Tạo trạng thái "k" trên hệ cơ bản tĩnh định và vẽ các biểu đồ ( $\bar{M}_k^o$ ), ( $\bar{N}_k^o$ ) (hình 5.36a, b).



Hình 5.36

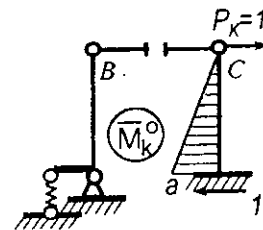
3) Xác định chuyển vị theo (5.31):

$$\begin{aligned} \Delta_{kl} &= (M_l)(\bar{M}_k^o) + \sum \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \Omega(\bar{M}_k^o) + \sum \alpha t_c \Omega(\bar{N}_k^o) = \\ &= -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{3EI\alpha t}{5l} \left[ \frac{3}{2} + \frac{2l}{h} \right] + \frac{\alpha}{h} t \frac{1}{2} \frac{1}{4} l + \frac{3}{2} \alpha t \left[ -\frac{l}{2} - \frac{l}{2} \right] = -\frac{\alpha t l}{80} \left[ 129 + 2 \frac{l}{h} \right]. \end{aligned}$$

Dấu trừ chứng tỏ chuyển vị hướng ngược chiều với  $P_k$  tức là hướng lên trên.

**Ví dụ 5.15.** Xác định chuyển vị ngang tại C của khung đã xét ở ví dụ 5.9.

Nguyên nhân gây ra chuyển vị trong khung là tải trọng và chuyển vị cưỡng bức, do đó ta sử dụng công thức (5.29) và (5.33) để xác định.



Hình 5.37

Thứ tự thực hiện như sau:

1) Vẽ biểu đồ ( $M$ ). Bài toán này đã được khảo sát trong ví dụ 5.9, kết quả tìm được như trên hình 5.28e.

2) Tạo trạng thái "k" trên hệ cơ bản tĩnh định và vẽ biểu đồ ( $\bar{M}_k^o$ ). Kết quả như trên hình 5.37.

3) Xác định chuyển vị theo (5.33):

$$\begin{aligned} x_C &= (M)(\bar{M}_k^o) + \sum_j \bar{R}_{jk}^o \frac{R_{jz}}{c_j} - \sum_j \bar{R}_{jk}^o Z_j = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} ma^2 \cdot \frac{2}{3} a \right] + 0 - [-1 \cdot \Delta] = \frac{ma^3}{6EI} + \frac{ma^3}{6EI} = \frac{ma^3}{3EI}. \end{aligned}$$

Kết quả mang dấu cộng chứng tỏ chuyển vị cùng chiều với  $P_k$ .

### C. Trường hợp hệ dàn siêu tĩnh

Để tìm chuyển vị trong hệ dàn siêu tĩnh ta có thể sử dụng các kết luận về khả năng tạo trạng thái khả dĩ trong hệ cơ bản tĩnh định bất kỳ như đã nêu ở trên và các công thức đã xây dựng trong chương 4.

Trong trường hợp này, ta có:

$$\Delta_{km} = \sum_i \bar{N}_{ik}^o N_{im} \frac{l_i}{(EA)_i} + \sum_j \bar{R}_{jk}^o \frac{R_{jm}}{c_j} + \sum_i \alpha_c l_i \bar{N}_{ik}^o + \sum_i \bar{N}_{ik}^o \Delta_i - \sum_j \bar{R}_{jk}^o Z_j \quad (5.34)$$

trong đó:

$\Delta_{km}$  – chuyển vị cần tìm do các nguyên nhân "m" gây ra trong hệ siêu tĩnh;

$N_{im}$  – lực dọc trong thanh thứ  $i$  do các nguyên nhân "m" gây ra trong dàn siêu tĩnh;

$R_{jm}$  – phản lực tại liên kết dàn hồi thứ  $j$  do các nguyên nhân gây ra trong hệ siêu tĩnh.

$\bar{N}_{ik}^o$  – lực dọc trong thanh thứ  $i$  do lực  $P_k=l$  gây ra ở trạng thái "k";

$\bar{R}_{jk}^o$  – phản lực tại liên kết dàn hồi hoặc tại gối tựa thứ  $j$  do lực  $P_k=l$  gây ra ở trạng thái "k".

Trạng thái "k" được tạo ra trong một hệ cơ bản tĩnh định bất kỳ suy ra từ dàn siêu tĩnh đã cho.

### 5.5. Cách kiểm tra kết quả

Khi giải bài toán siêu tĩnh ta cần thực hiện khá nhiều những phép tính trung gian, do đó dễ mắc phải những *sai lầm* hoặc *sai số* lớn trong kết quả cuối cùng.

Để tránh những sai số lớn ta phải tính chính xác các phép tính trung gian. Kinh nghiệm tính toán chúng tôi: để bảo đảm cho kết quả cuối cùng được chính xác tới  $m$  con số thuộc phần thập phân thì các phép tính toán trung gian cần phải thực hiện tới  $m+2$  con số thuộc phần thập phân.

Để tránh xảy ra những sai lầm ta cần tiến hành kiểm tra kết quả. Biện pháp kiểm tra tốt hơn cả là vận dụng một số tính chất nào đó độc lập với các phép tính toán đã sử dụng.

Ngoài việc kiểm tra kết quả cuối cùng ta cần tiến hành kiểm tra từng khâu

trong quá trình tính toán để phát hiện ngay sai lầm đã mắc phải.

Dưới đây sẽ lần lượt trình bày cách kiểm tra kết quả trong từng khâu theo thứ tự khi giải bài toán siêu tĩnh với giả thiết hệ cơ bản được chọn là tĩnh định. Trong trình bày, để cho gọn, ta sẽ biểu thị cách tính chuyển vị theo kiểu nhân biểu đồ trong đó chỉ chú ý tới ảnh hưởng của biến dạng uốn. Tất nhiên, những kết luận dưới đây vẫn đúng cho các trường hợp tính chuyển vị theo kiểu tích phân hay có xét đến đầy đủ các yếu tố khác.

### A. Kiểm tra quá trình tính toán

#### 1. Kiểm tra các biểu đồ đơn vị ( $\bar{M}_k$ ) và biểu đồ ( $M_p$ )

Vận dụng các liên hệ vi phân và điều kiện cân bằng của từng bộ phận được tách ra khỏi hệ như đã biết trong Sức bền vật liệu để kiểm tra.

#### 2. Kiểm tra các hệ số $\delta_{km}$

Gọi  $\bar{R}_{jS}$  và ( $\bar{M}_S$ ) là phản lực tại liên kết dàn hồi thứ  $j$  và biểu đồ đơn vị tổng cộng tức là biểu đồ mômen uốn do tất cả các ản  $X_1 = X_2 = \dots = X_k = \dots = X_n = 1$  tác dụng đồng thời trong hệ cơ bản. Có thể tìm các phản lực và biểu đồ này một cách độc lập hoặc bằng cách cộng các phản lực  $\bar{R}_{jk}$  và các biểu đồ đơn vị ( $\bar{M}_k$ ):

$$\begin{aligned} \bar{R}_{jS} &= \bar{R}_{j1} + \bar{R}_{j2} + \dots + \bar{R}_{jk} + \dots + \bar{R}_{jn}. \\ (\bar{M}_S) &= (\bar{M}_1) + (\bar{M}_2) + \dots + (\bar{M}_k) + \dots + (\bar{M}_n). \end{aligned} \quad (5.35)$$

#### Điều kiện kiểm tra

a) Kết quả tính tập hợp chuyển vị tương ứng với tập hợp các lực  $X_1 = X_2 = \dots = X_k = \dots = X_n = 1$  đồng thời tác dụng do riêng lực  $X_k = 1$  gây ra trong hệ cơ bản phải bằng tổng các hệ số thuộc hàng thứ  $k$  của hệ phương trình chính tắc.

$$(\bar{M}_k)(\bar{M}_S) + \sum_j \frac{\bar{R}_{jk} \bar{R}_{jS}}{c_j} = \delta_{k1} + \delta_{k2} + \dots + \delta_{kk} + \dots + \delta_{kn}. \quad (5.36)$$

Thật vậy, thay các biểu thức (5.35) vào vế trái của (5.36) rồi khai triển, ta được:

$$\begin{aligned} (\bar{M}_k)(\bar{M}_S) + \sum_j \frac{\bar{R}_{jk} \bar{R}_{jS}}{c_j} &= (\bar{M}_k)[(\bar{M}_1) + (\bar{M}_2) + \dots + (\bar{M}_k) + \dots + (\bar{M}_n)] + \\ &+ \sum_j \frac{\bar{R}_{jk}}{c_j} (\bar{R}_{j1} + \bar{R}_{j2} + \dots + \bar{R}_{jk} + \dots + \bar{R}_{jn}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\bar{M}_k)(\bar{M}_1) + \sum_j \frac{\bar{R}_{jk}\bar{R}_{j1}}{c_j} + (\bar{M}_k)(\bar{M}_2) + \sum_j \frac{\bar{R}_{jk}\bar{R}_{j2}}{c_j} + \dots + \\
&+ (\bar{M}_k)(\bar{M}_k) + \sum_j \frac{\bar{R}_{jk}\bar{R}_{jk}}{c_j} + \dots + (\bar{M}_k)(\bar{M}_n) + \sum_j \frac{\bar{R}_{jk}\bar{R}_{jn}}{c_j} = \\
&= \delta_{k1} + \delta_{k2} + \dots + \delta_{kn} + \dots + \delta_{kn}.
\end{aligned}$$

Đó là điều cần chứng minh. Vận dụng điều kiện này ta sẽ kiểm tra các hệ số  $\delta_{km}$  theo từng hàng của hệ phương trình chính tắc.

b) *Kết quả tính tập hợp chuyển vị tương ứng với tập hợp các lực  $X_1 = X_2 = \dots = X_k = \dots = X_n = 1$  đồng thời tác dụng do chính tập hợp các lực đó gây ra trong hệ cơ bản phải bằng tổng toàn bộ các hệ số  $\delta_{km}$  của hệ phương trình chính tắc.*

$$(\bar{M}_S)(\bar{M}_S) + \sum_j \frac{\bar{R}_{jS}\bar{R}_{jS}}{c_j} = \sum_{k,m} \delta_{km} \quad \text{với} \quad \begin{cases} k = 1, 2, \dots, n; \\ m = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (5.37)$$

Ta dễ dàng chứng minh được điều kiện này nếu thay các biểu thức (5.35) vào vế trái của (5.37) rồi khai triển.

### 3. Kiểm tra các số hạng tự do

a) *Kiểm tra các  $\Delta_{kP}$ : Kết quả tính tập hợp chuyển vị tương ứng với tập hợp các lực  $X_1 = X_2 = \dots = X_k = \dots = X_n = 1$  đồng thời tác dụng do các tải trọng gây ra trong hệ cơ bản phải bằng tổng các số hạng tự do  $\Delta_{kP}$ .*

$$(\bar{M}_S)(M_P^o) + \sum_j \frac{R_{jP}\bar{R}_{jS}}{c_j} = \Delta_{1P} + \Delta_{2P} + \dots + \Delta_{nP}. \quad (5.38)$$

trong đó  $R_{jP}$  là phản lực tại liên kết dầm hồi thứ  $j$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

Thật vậy, thay các biểu thức (5.35) vào vế trái của (5.38) rồi khai triển ta được:

$$\begin{aligned}
&(\bar{M}_S)(M_P^o) + \sum_j \frac{R_{jP}\bar{R}_{jS}}{c_j} = [(\bar{M}_1) + (\bar{M}_2) + \dots + (\bar{M}_n)](M_P^o) + \\
&+ \sum_j \frac{R_{jP}}{c_j} (\bar{R}_{j1} + \bar{R}_{j2} + \dots + \bar{R}_{jk} + \dots + \bar{R}_{jn}) = \\
&= (\bar{M}_1)(M_P^o) + \sum_j \frac{R_{jP}\bar{R}_{j1}}{c_j} + (\bar{M}_2)(M_P^o) + \sum_j \frac{R_{jP}\bar{R}_{j2}}{c_j} + \dots +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +(\bar{M}_k)(M_P^o) + \sum_j \frac{R_{jP} \bar{R}_{jk}}{c_j} + \dots + (\bar{M}_n)(M_P^o) + \sum_j \frac{R_{jP} \bar{R}_{jS}}{c_j} = \\
 & = \Delta_{1P} + \Delta_{2P} + \dots + \Delta_{kP} + \dots + \Delta_{nP}.
 \end{aligned}$$

Đó là điều cần chứng minh.

b) Kiểm tra các  $\Delta_{kt}$ : Kết quả tính tập hợp chuyển vị tương ứng với tập hợp các lực  $X_1 = X_2 = \dots = X_k = \dots = X_n = 1$  đồng thời tác dụng do sự thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản phải bằng tổng các số hạng tự do  $\Delta_{kt}$ .

$$\sum_h \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \Omega(\bar{M}_S) + \sum c \alpha_c \Omega(\bar{N}_S) = \sum_{k=1}^n \Delta_{kt}, \quad (5.39)$$

trong đó  $\Omega(\bar{M}_S)$  và  $\Omega(\bar{N}_S)$  lần lượt là diện tích biểu đồ mômen uốn và diện tích biểu đồ lực dọc do các lực  $X_1 = X_2 = \dots = X_k = \dots = X_n = 1$  đồng thời cùng tác dụng gây ra trong các đoạn thanh của hệ cơ bản.

Nếu chú ý là theo nguyên lý cộng tác dụng, ta có:

$$\begin{aligned}
 \Omega(\bar{M}_S) &= \Omega(\bar{M}_1) + \Omega(\bar{M}_2) + \dots + \Omega(\bar{M}_k) + \dots + \Omega(\bar{M}_n); \\
 \Omega(\bar{N}_S) &= \Omega(\bar{N}_1) + \Omega(\bar{N}_2) + \dots + \Omega(\bar{N}_k) + \dots + \Omega(\bar{N}_n),
 \end{aligned}$$

thì sau khi thay các biểu thức này vào vế trái của (5.39) ta dễ dàng chứng minh được điều kiện kiểm tra (5.39).

c) Kiểm tra các  $\Delta_{k\Delta}$ : Kết quả tính tập hợp chuyển vị tương ứng với tập hợp các lực  $X_1 = X_2 = \dots = X_k = \dots = X_n = 1$  đồng thời tác dụng do sự chế tạo chiều dài của thanh không chính xác gây ra trong hệ cơ bản phải bằng tổng các số hạng tự do  $\Delta_{k\Delta}$ .

$$\sum_i \bar{N}_{iS} \Delta_i = \sum_{k=1}^n \Delta_{k\Delta}, \quad (5.40)$$

$\bar{N}_{iS}$  là lực dọc trong thanh thứ  $i$  do các lực  $X_1 = X_2 = \dots = X_k = \dots = X_n = 1$  đồng thời cùng tác dụng gây ra trong hệ cơ bản.

Nếu chú ý là  $\bar{N}_{iS} = \bar{N}_{i1} + \bar{N}_{i2} + \dots + \bar{N}_{ik} + \dots + \bar{N}_{in}$

thì sau khi thay biểu thức này vào vế trái của (5.40) ta dễ dàng chứng minh được điều kiện kiểm tra (5.40).

d) Kiểm tra các  $\Delta_{kz}$ : Kết quả tính tập hợp chuyển vị tương ứng với tập hợp các lực  $X_1 = X_2 = \dots = X_k = \dots = X_n = 1$  đồng thời tác dụng do chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa gây ra trong hệ cơ bản phải bằng tổng các số hạng tự do  $\Delta_{kz}$ .

$$-\sum_i \bar{R}_{jS} Z_{jm} = \sum_{k=1}^n \Delta_{kZ}, \quad (5.41)$$

$\bar{R}_{jS}$  là phản lực tại liên kết thứ  $j$  do các lực  $X_1 = X_2 = \dots = X_k = \dots = X_n = 1$  đồng thời cùng tác dụng gây ra trong hệ cơ bản.

Nếu chú ý là  $\bar{R}_{jS} = \bar{R}_{j1} + \bar{R}_{j2} + \dots + \bar{R}_{jk} + \dots + \bar{R}_{jn}$  thì sau khi thay biểu thức này vào vế trái của (5.41) ta sẽ chứng minh được điều kiện kiểm tra (5.41).

#### 4. Kiểm tra kết quả giải hệ phương trình chính tắc.

Nếu cách giải hệ phương trình chính tắc được áp dụng không có điều kiện kiểm tra riêng biệt thì sau khi tìm được các ẩn số  $X_k$  ta cần thay những giá trị vừa tìm được của  $X_k$  vào hệ phương trình ban đầu, khi tìm được các ẩn số  $X_k$  đúng thì các phương trình chính tắc đều bằng không. Tuy nhiên, trong thực hành tính toán, do hậu quả của việc làm tròn các số liệu tính toán trung gian đến một số hữu hạn các số thuộc phần thập phân nên sau khi thay thế các lực  $X_k$  tìm được vào hệ phương trình chính tắc ban đầu, kết quả thường khác không. Để đánh giá sai số, trong mỗi phương trình ta có thể tập hợp các số liệu và biểu thị kết quả tính bằng hiệu của hai số  $A$  và  $B$ . Nói chung  $A - B \neq 0$ . Mức độ sai số được biểu thị qua sai số tỉ đối  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{A - B}{A} \times 100 (\%).$$

Tùy theo yêu cầu về mức độ chính xác cần thiết của công tác thiết kế, người ta quy định sai số tỉ đối cho phép  $[\varepsilon]$  và người thiết kế phải tính toán sao cho bảo đảm được điều kiện  $\varepsilon \leq [\varepsilon]$ .

#### B. Kiểm tra kết quả cuối cùng

Để kiểm tra kết quả cuối cùng (thường là biểu đồ mômen uốn), nếu sử dụng điều kiện cân bằng thì chưa bảo đảm vì biểu đồ này tìm được bằng phép tổ hợp các biểu đồ vốn dĩ đã cân bằng. Để bảo đảm, cần thực hiện phép kiểm tra theo điều kiện biến dạng.

##### 1. Trường hợp hệ siêu tĩnh chịu tải trọng

Nếu biểu đồ cuối cùng ( $M_P$ ) đúng thì kết quả tính chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $X_k$  nào đó phải bằng không.

$$\text{Ta có điều kiện: } (M_P) (\bar{M}_k) + \sum_j \bar{R}_{jk} \frac{R_{jP}}{c_j} = 0. \quad (5.42)$$



Thật vậy,  $\bar{R}_{jk}$  và  $(\bar{M}_k)$  là phản lực tại liên kết đàn hồi thứ  $j$  và biểu đồ mômen uốn do lực  $X_k = 1$  gây ra trong hệ cơ bản, do đó, theo công thức (5.29) thì kết quả của phép tính này chính là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $X_k$  do tải trọng gây ra trong hệ siêu tĩnh. Trong hệ siêu tĩnh, chuyển vị này không tồn tại vì có liên kết ngăn cản nên kết quả phải bằng không.

## 2. Trường hợp hệ siêu tĩnh chịu các nguyên nhân: thay đổi nhiệt độ, chế tạo chiều dài các thanh không chính xác và chuyển vị gối tựa

Nếu biểu đồ  $(M_I)$ ,  $(M_\Delta)$ ,  $(M_Z)$  đúng thì kết quả nhân những biểu đồ này với một biểu đồ  $(\bar{M}_k)$  nào đó phải bằng số hạng tự do  $\Delta_{kt}$ ,  $\Delta_{k\Delta}$ ,  $\Delta_{kZ}$  của phương trình chính tắc thứ  $k$  nhưng trái dấu:

$$(M_I)(\bar{M}_k) = -\Delta_{kt}; \quad (5.43)$$

$$(M_\Delta)(\bar{M}_k) = -\Delta_{k\Delta}; \quad (5.44)$$

$$(M_Z)(\bar{M}_k) = -\Delta_{kZ}. \quad (5.45)$$

Ta sẽ chứng minh điều kiện (5.43) bằng cách vận dụng công thức (5.31). Trong trường hợp này, trạng thái "k" là trạng thái do ẩn  $X_k = 1$  gây ra trong hệ cơ bản nên:

- Chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của  $X_k$  trong hệ siêu tĩnh (vế trái của 5.31) bằng không.
- $(\bar{M}_k)$  là biểu đồ mômen uốn do lực  $X_k = 1$  gây ra trong hệ cơ bản, giữ vai trò  $(\bar{M}_k^0)$  trong công thức (5.31).
- $\Delta_{kt}$  là số hạng tự do của phương trình chính tắc thứ  $k$  tức là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của  $X_k$  do riêng nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản, giữ vai trò  $\Delta_{kt}^0$  trong (5.31).

Vậy theo (5.31), ta có  $0 = (M_I)(\bar{M}_k) + \Delta_{kt}$ , do đó  $(M_I)(\bar{M}_k) = -\Delta_{kt}$ .

Đó là điều cần chứng minh.

Cách chứng minh điều kiện (5.44) và (5.45) cũng tương tự.

Ta cũng có thể chứng minh các điều kiện (5.42), (5.43), (5.44), (5.45) bằng cách thay thế các biểu thức của  $(M_P)$ ,  $(M_I)$ ,  $(M_\Delta)$ ,  $(M_Z)$  vào vế trái của những điều kiện tương ứng rồi khai triển.

**Chú ý:** Nếu trong các điều kiện kiểm tra nói trên ta thay  $(\bar{M}_k)$  bằng  $(\bar{M}_S)$  thì cũng chứng minh tương tự ta được:

$$\begin{aligned} (M_P)(\bar{M}_S) + \sum_j \bar{R}_{jS} \frac{R_{jP}}{c_j} &= 0; & (M_1)(\bar{M}_S) &= -\sum \Delta_{k1}; \\ (M_2)(\bar{M}_S) &= -\sum \Delta_{k2}; & (M_2)(\bar{M}_S) &= -\sum \Delta_{k2}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

**Ví dụ 5.16.** Kiểm tra kết quả tính toán trong ví dụ 5.3.

Để kiểm tra ta lập biểu đồ đơn vị tổng cộng  $(\bar{M}_S)$  (hình 5.38).

1. Kiểm tra các hệ số

- Theo hàng thứ nhất. Nhân  $(\bar{M}_S)$  với  $(\bar{M}_1)$  (xem hình 5.17a):

$$(\bar{M}_S)(\bar{M}_1) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{2a}{3} + \frac{1}{2} a \cdot a \cdot a \right] = \frac{5a^3}{6EI}.$$

Mặt khác:

$$\delta_{11} + \delta_{12} = \frac{4a^3}{3EI} - \frac{a^3}{2EI} = \frac{5a^3}{6EI} \text{ (đúng)}.$$

- Theo hàng thứ hai. Nhân  $(\bar{M}_S)$  với  $(\bar{M}_2)$  (hình 5.17b):

$$(\bar{M}_S)(\bar{M}_2) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{3} a \cdot a \right] = -\frac{a^3}{6EI}.$$

Mặt khác:  $\delta_{21} + \delta_{22} = -\frac{a^3}{2EI} + \frac{a^3}{3EI} = -\frac{a^3}{6EI}$  (đúng).

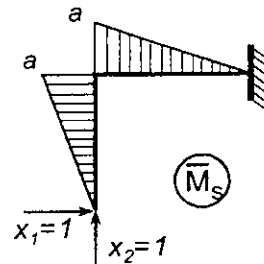
- Kiểm tra toàn bộ các hệ số:

$$(\bar{M}_S)(\bar{M}_S) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a + \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \right] = \frac{2a^3}{3EI}.$$

Mặt khác  $\sum_{k,m} \delta_{km} = \frac{4a^3}{3EI} - \frac{a^3}{2EI} - \frac{a^3}{2EI} + \frac{a^3}{3EI} = \frac{2a^3}{3EI}$  (đúng).

2. Kiểm tra các số hạng tự do. Nhân biểu đồ  $(\bar{M}_S)$  với  $(M_P^o)$  (hình 5.17c):

$$(\bar{M}_S)(M_P^o) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3} \frac{qa^2}{2} a \cdot \frac{3}{4} a + \frac{qa^2}{2} a \cdot \frac{1}{2} a \right] = \frac{3qa^4}{8EI}.$$



Hình 5.38

Mặt khác 
$$\Delta_{1P} + \Delta_{2P} = \frac{5qa^4}{8EI} - \frac{qa^4}{4EI} = \frac{3qa^4}{8EI} \text{ (đúng).}$$

3. Kiểm tra kết quả cuối cùng. Ta sẽ kiểm tra theo điều kiện đầu của (5.46). Biểu đồ  $(M_P)$  đã tìm được trên hình 5.17f. Ta có:

$$(M_P)(\bar{M}_S) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \frac{qa^2}{14} a \cdot \frac{2}{3} a - \frac{2}{3} \frac{qa^2}{8} a \cdot \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} \frac{qa^2}{14} a \cdot \frac{2}{3} a - \frac{1}{2} \frac{qa^2}{28} a \cdot \frac{1}{3} a \right] = \frac{2qa^4}{EI} \left[ \frac{1}{+2} - \frac{1}{+2} \right] = 0 \text{ (đúng).}$$

Qua các nội dung trình bày ở trên ta thấy tuy cách kiểm tra có ưu điểm là độc lập với các phép tính đã dùng nhưng cũng bộc lộ một vài khuyết điểm sau:

- \* Cách kiểm tra còn phức tạp, khối lượng công việc để kiểm tra còn lớn.
- \* Khi điều kiện kiểm tra thỏa mãn thì cũng chưa thể khẳng định loại trừ khả năng xảy ra sai lầm. Thật vậy, điều kiện kiểm tra vẫn có thể được thỏa mãn khi người tính toán và người kiểm tra cùng mắc sai lầm như nhau trong các bước vẽ biểu đồ hoặc nhân biểu đồ. Như vậy, cách kiểm tra chỉ có thể tin cậy được khi những người thực hiện không bị mắc sai lầm về nguyên tắc tính toán.

Cũng cần lưu ý là trong thực hành tính toán, do hậu quả của phép làm tròn các số liệu nên các điều kiện kiểm tra nói trên thường sẽ không đồng nhất bằng không hoặc bằng nhau. Lúc này ta cần đánh giá sai số theo quy cách đã trình bày trong phần kiểm tra việc giải hệ phương trình chính tắc.

## 5.6. Một số điều cần chú ý khi tính các hệ siêu tĩnh bậc cao

Trong các mục trên ta đã nghiên cứu nội dung phương pháp lực và thông qua một số ví dụ minh họa cách vận dụng phương pháp lực để tính các hệ siêu tĩnh bậc thấp. Trong thực tế ta thường gặp những hệ siêu tĩnh có bậc cao, khi tính những hệ này cần chú ý tìm các biện pháp để nâng cao độ chính xác của kết quả tính toán và giảm nhẹ khối lượng tính toán.

### A. Các biện pháp nâng cao độ chính xác của kết quả tính toán

Ngoài các biện pháp kiểm tra các số liệu tính toán đã trình bày trong 5.5 để loại trừ những sai lầm, khi tính toán ta còn phải làm tròn các số liệu

tính toán bằng số. Những sai số này sẽ có ảnh hưởng đến kết quả cuối cùng. Thông thường, muốn bảo đảm cho kết quả cuối cùng đạt độ chính xác đến  $m$  con số thuộc phần thập phân, các số liệu tính toán trung gian cần đạt độ chính xác tối thiểu đến  $m+2$  con số thuộc phần thập phân. Tuy vậy, vấn đề này trở nên đáng quan tâm khi tính hệ siêu tĩnh bậc cao hay nói khác đi là khi giải một số lượng lớn các phương trình chính tắc. Thật vậy, nghiệm của hệ phương trình chính tắc thường là số nhỏ tìm được từ hiệu của hai số lớn, do đó việc làm tròn các số lớn có thể dẫn đến các sai số lớn đối với hiệu của chúng. Vấn đề này càng trở nên đáng lo ngại khi nghiệm của *hệ phương trình chính tắc không ổn định*. Những nghiệm được gọi là không ổn định khi ta thay đổi rất nhỏ giá trị của các phần tử của hệ phương trình sẽ gây ra những thay đổi lớn đối với kết quả cần tìm. Nói chung, khắc phục vấn đề này cũng tương đối khó khăn. Ngoài các biện pháp toán học, về mặt cơ học kết cấu ta có thể nêu ra một vài cách khắc phục như sau:

- 1) *Chọn phương pháp tính sao cho số lượng ẩn là ít nhất*. Đối với mỗi bài toán cụ thể ta nên cân nhắc xem trong số các phương pháp như phương pháp lực, phương pháp chuyển vị (xem chương 6), phương pháp hỗn hợp (xem chương 7)... nên chọn phương pháp nào yêu cầu số ẩn ít nhất.
- 2) *Khi vận dụng phương pháp lực, nên chọn hệ cơ bản sao cho hệ làm việc càng sát với hệ siêu tĩnh càng tốt*. Hệ cơ bản làm việc sát với hệ siêu tĩnh là hệ cơ bản khi chịu các nguyên nhân bên ngoài sẽ phát sinh các nội lực và chuyển vị không chênh lệch nhiều so với nội lực, chuyển vị trong hệ siêu tĩnh. Lúc này các lực  $X$  chỉ gây ra một phần ảnh hưởng nhỏ đến kết quả cuối cùng. Tất nhiên, biện pháp này đòi hỏi người thiết kế phải có nhiều kinh nghiệm.
- 3) *Dùng các biện pháp giảm thiểu số lượng các phương trình cần phải giải, sẽ trình bày trong điểm B.I dưới đây*.

## **B. Các biện pháp giảm nhẹ khối lượng tính toán**

Khi tính các hệ siêu tĩnh bậc càng cao thì khối lượng tính toán, đặc biệt là khối lượng giải hệ phương trình càng tăng lên gấp bội. Bởi vậy, cần chú ý vận dụng các biện pháp dưới đây để giảm nhẹ khối lượng tính toán.

### **1. Các biện pháp giảm thiểu số lượng phương trình cần giải**

- a) *Chọn phương pháp tính sao cho số ẩn là ít nhất (đã nêu ở trên)*.

b) Khi tính hệ siêu tuyến theo phương pháp lực, không chọn hệ cơ bản tuyến định mà chọn hệ cơ bản siêu tuyến có bậc thấp hơn.

Biện pháp chọn hệ cơ bản siêu tuyến cho phép thay thế việc giải hệ  $n$  phương trình bằng cách giải hai hệ có số lượng phương trình là  $n_1$  và  $n_2$  với  $n_1+n_2=n$ . Giải hai hệ có số phương trình  $n_1$  và  $n_2$  tốn ít thời gian hơn giải một hệ có số phương trình là  $n=n_1+n_2$ .

Sự so sánh thời gian ở đây mới chỉ xét đơn thuần ở khâu giải hệ phương trình. Tất nhiên khi dùng biện pháp này thì khối lượng tính toán trong một số khâu khác sẽ tăng lên, song cần chú ý là khâu giải hệ phương trình là khâu chiếm khối lượng tính toán nhiều nhất. Trong thực hành, đối với từng bài toán cụ thể ta cần có sự cân nhắc trước khi vận dụng biện pháp này.

c) Trong trường hợp hệ siêu tuyến đã cho là hệ đối xứng, nên triệt để sử dụng tính chất đối xứng. Các biện pháp cụ thể sẽ được trình bày trong mục 5.7 dưới đây. Những biện pháp này cho phép thay thế việc giải hệ  $n$  phương trình bằng cách giải hai hệ phương trình nếu hệ có một trục đối xứng hoặc bốn hệ phương trình nếu hệ có hai trục đối xứng, trong đó tổng số các phương trình này bằng  $n$ . Cần chú ý là các biện pháp vận dụng tính chất đối xứng không làm tăng khối lượng tính toán trong các khâu khác mà còn góp phần giảm nhẹ hơn.

## 2. Các biện pháp đơn giản hóa cấu trúc của hệ phương trình chính tắc

Hệ phương trình chính tắc có cấu trúc đơn giản là hệ phương trình có nhiều các hệ số phụ bằng không.

Giải hệ phương trình có càng nhiều hệ số phụ bằng không thì khối lượng tính toán càng được giảm nhẹ so với khi giải hệ phương trình có đầy đủ các hệ số phụ. Để đạt được mục đích đó, trong phạm vi Cơ học kết cấu, ta có thể vận dụng các biện pháp sau:

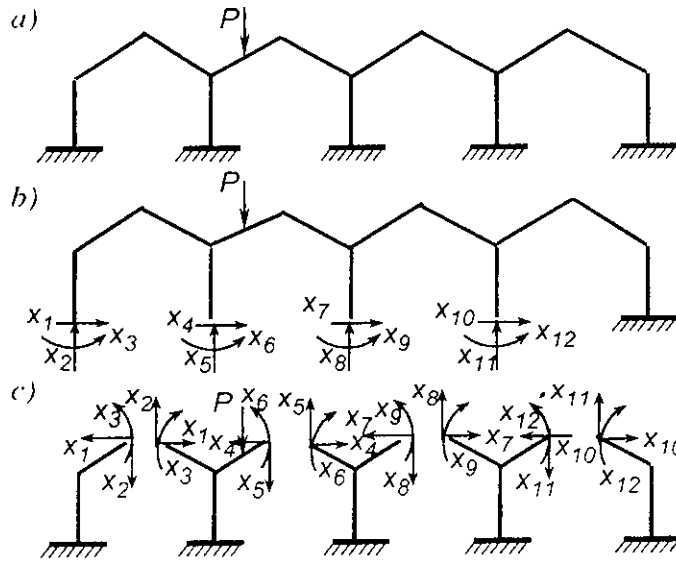
a) Nếu hệ có tính chất đối xứng, nên triệt để sử dụng tính chất đối xứng (xem 5.7). Kết quả của việc vận dụng tính chất đối xứng như đã nêu trong điểm 1c.

b) Chọn hệ cơ bản hợp lý. Tương ứng với mỗi hệ siêu tuyến ta có thể chọn hệ cơ bản theo nhiều cách khác nhau miễn là hệ cơ bản phải bất biến hình. Việc chọn dùng hệ cơ bản này hay hệ cơ bản khác có ảnh hưởng quan trọng đến khối lượng tính toán trong các khâu sau: xác định nội lực (vẽ biểu đồ), xác định các hệ số và số hạng tự do và đặc

biệt là trong khâu giải hệ phương trình chính tắc. Như vậy, hệ cơ bản hợp lý là hệ cơ bản chọn sao cho việc tính toán được đơn giản trong các khâu đã nêu ở trên.

Để đạt được yêu cầu nêu trên, nên chọn hệ cơ bản bằng cách cắt hệ thành nhiều bộ phận độc lập với nhau. Lúc này, các biểu đồ đơn vị sẽ phân bố cục bộ, việc xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc sẽ đơn giản và triển vọng có nhiều hệ số phụ bằng không.

Ví dụ với hệ siêu tĩnh trên hình 5.39a, ta có thể nêu ra hai cách chọn hệ cơ bản như trên hình 5.39b và c để so sánh.



Hình 5.39

*Hệ cơ bản 5.39b:* Nội lực trong hệ này nói chung phân phối trên toàn hệ (chẳng hạn, dưới tác dụng của riêng lực  $X_1 = 1$ , biểu đồ  $\bar{M}_1$  phân bố trên phần lớn các thanh của hệ cơ bản). Do đó, xác định các hệ số và số hạng tự do mất nhiều công sức, tất cả các hệ số phụ đều tồn tại.

*Hệ cơ bản 5.39c:* Hệ cơ bản này gồm nhiều bộ phận độc lập với nhau, mỗi biểu đồ nội lực đơn vị chỉ phân bố trong hai bộ phận lân cận của hệ cơ bản. Do đó, việc vẽ các biểu đồ đơn vị sẽ đơn giản hơn, xác định các hệ số và số hạng tự do cũng dễ dàng và nhanh chóng, nhiều hệ số phụ bằng không (chẳng hạn  $\delta_{17} = \delta_{18} = \delta_{19} = \dots = 0$ ).

Vậy hệ cơ bản 5.39c hợp lý hơn hệ cơ bản 5.39b.

c) *Biến đổi vị trí và phương của các ẩn số.* Biện pháp này sẽ được trình bày trong mục 5.8 dưới đây.

## 5.7. Cách vận dụng tính chất đối xứng của hệ

Trong thực tế ta thường gặp những hệ có hình dạng, kích thước hình học và độ cứng đối xứng qua một trục. Như đã nêu trong 5.6, nếu biết cách vận dụng tính chất đối xứng của hệ thì khối lượng tính toán sẽ được giảm nhẹ khá nhiều. Khi tính các hệ siêu tĩnh đối xứng ta có thể vận dụng một trong hai biện pháp cụ thể dưới đây để đơn giản hóa tính toán.

### A. Biện pháp sử dụng các cặp ẩn đối xứng và phản xứng

Giả sử xét hệ siêu tĩnh đối xứng như trên hình 5.40a. Chọn hệ cơ bản cũng có tính chất đối xứng như trên hình 5.40b. Các ẩn trong hệ cơ bản đối xứng nói chung gồm hai loại:

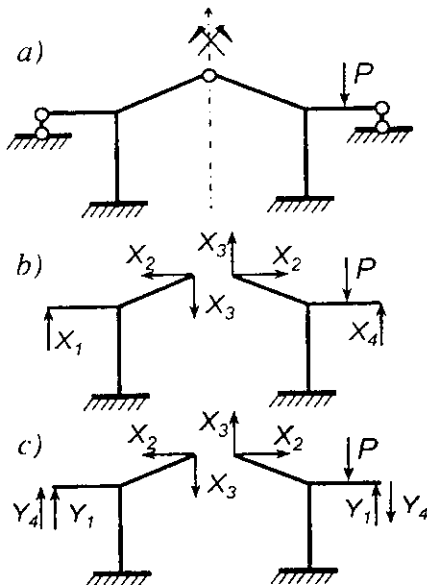
- \* *Loại ẩn có tính chất đối xứng hay phản xứng.* Ví dụ cặp ẩn số  $X_2$  có tính đối xứng, cặp  $X_3$  có tính phản xứng.
- \* *Loại ẩn chỉ có vị trí đối xứng còn về trị số thì khác nhau.* Ví dụ hai ẩn  $X_1$  và  $X_4$ .

Để triệt để sử dụng tính chất đối xứng, ta phân tích từng hai ẩn có vị trí đối xứng thành hai cặp ẩn: *một cặp đối xứng và một cặp phản xứng.* Ví dụ, phân tích hai ẩn  $X_1$  và  $X_4$  thành hai cặp: cặp  $Y_1$  đối xứng và cặp  $Y_4$  phản xứng (hình 5.40c). Tất nhiên hai cặp ẩn mới  $Y_1$  và  $Y_4$  phải thỏa mãn điều kiện:

$$Y_1 + Y_4 = X_1; \quad Y_1 - Y_4 = X_4.$$

Cách phân tích này luôn luôn có thể thực hiện được vì  $Y_1$  và  $Y_4$  là nghiệm duy nhất của các ẩn  $X_1$  và  $X_4$ .

$$Y_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_4); \quad Y_4 = \frac{1}{2}(X_1 - X_4). \quad (5.47)$$



Hình 5. 40

Sau khi đã phân tích như trên ta sẽ thực hiện tính toán với các ẩn mới  $Y_1$ ,  $Y_4$  và các ẩn về bản chất đã mang tính chất đối xứng hoặc phản xứng  $X_2$  và  $X_3$ .

Hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\begin{aligned}\delta_{11}Y_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}Y_4 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}Y_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}Y_4 + \Delta_{2P} &= 0; \\ \delta_{31}Y_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}Y_4 + \Delta_{3P} &= 0; \\ \delta_{41}Y_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}Y_4 + \Delta_{4P} &= 0.\end{aligned}$$

Trong trường hợp này:

- ❖ Các cặp ẩn  $Y_1$  và  $X_2$  đối xứng nên các biểu đồ ( $\bar{M}_1$ ) và ( $\bar{M}_2$ ) đối xứng.
- ❖ Các cặp ẩn  $X_3$ ,  $Y_4$  phản xứng nên các biểu đồ ( $\bar{M}_3$ ) và ( $\bar{M}_4$ ) phản xứng.

Như đã biết, kết quả nhân biểu đồ đối xứng với biểu đồ phản xứng sẽ bằng không. Do đó các chuyển vị  $\delta_{km}$  sẽ bằng không khi một chỉ số của nó biểu thị cặp ẩn đối xứng còn một chỉ số biểu thị cặp ẩn phản xứng. Cụ thể là các chuyển vị  $\delta_{13} = \delta_{13} = \delta_{41} = \delta_{41} = \delta_{23} = \delta_{32} = \delta_{24} = \delta_{42} = 0$ .

Lúc này hệ phương trình chính tắc sẽ phân ra thành hai hệ phương trình độc lập:

$$\left. \begin{aligned}\delta_{11}Y_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21}Y_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0\end{aligned} \right\} i \quad (a)$$

$$\left. \begin{aligned}\delta_{33}X_3 + \delta_{34}Y_4 + \Delta_{3P} &= 0 \\ \delta_{43}X_3 + \delta_{44}Y_4 + \Delta_{4P} &= 0\end{aligned} \right\} j \quad (b)$$

Một hệ (hệ a) chỉ chứa những cặp ẩn đối xứng còn một hệ (hệ b) chỉ chứa những cặp ẩn phản xứng.

Với hệ siêu tĩnh đối xứng bậc  $n$ , nếu áp dụng các cặp ẩn số đối xứng và phản xứng như đã nói ở trên thì ta có thể đưa hệ phương trình chính tắc về hai hệ phương trình độc lập: một hệ có  $n_1$  phương trình và một hệ có  $n_2$  phương trình với  $n_1 + n_2 = n$ .

Kết luận vừa thu được ở trên không phụ thuộc vào nguyên nhân tác dụng, nghĩa là nguyên nhân tác dụng có thể bất kỳ. Trong trường hợp đặc biệt khi:



## 1. Nguyên nhân tác dụng đối xứng

Chẳng hạn hệ chịu tải trọng tác dụng đối xứng, lúc này biểu đồ ( $M_p^0$ ) đối xứng nên  $\Delta_{3P} = \Delta_{4P} = 0$ .

Thay vào hệ (b) ta được hệ phương trình thuần nhất, vì định thức các hệ số của hệ phương trình chính tắc trong phương pháp lực luôn luôn khác không nên

$$X_3 = Y_4 = 0.$$

Như vậy, ta có thể kết luận: nếu hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng thì các cặp ẩn phản xứng bằng không.

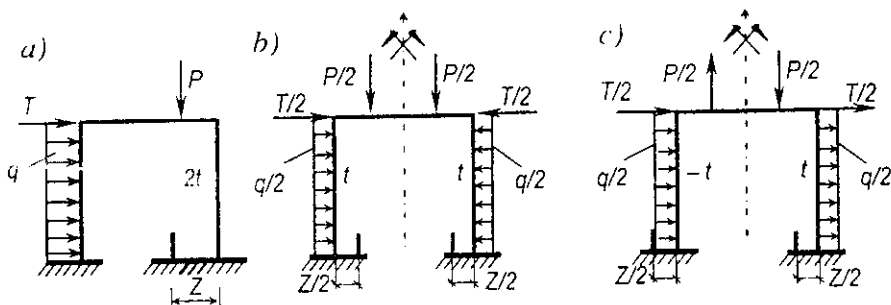
## 2. Nguyên nhân tác dụng phản xứng

Cũng lý luận tương tự như trên, ta đi đến kết luận sau: nếu hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng thì các cặp ẩn đối xứng bằng không.

**Chú thích:** Trong trường hợp hệ có hai trục đối xứng, nếu cũng vận dụng biện pháp như đã nói ở trên với cả hai trục đối xứng thì hệ phương trình chính tắc sẽ phân thành bốn hệ phương trình độc lập. Gọi  $n_1, n_2, n_3, n_4$  – lần lượt là số phương trình của bốn hệ nói trên, ta có  $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$ .

## B. Biện pháp biến đổi sơ đồ tính

Khi tính hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng bất kỳ (hình 5.41a) ta luôn có thể dựa vào nguyên lý cộng tác dụng để phân tích các nguyên nhân bất kỳ đó thành nguyên nhân tác dụng đối xứng (hình 5.41b) và nguyên nhân tác dụng phản xứng (hình 5.41c).



Hình 5. 41

Như vậy ta có thể thay thế việc tính hệ siêu tĩnh đối xứng chịu nguyên nhân bất kỳ bằng việc tính hai hệ: hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng và hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng. Trên cơ

sở nguyên lý cộng tác dụng, nội lực và chuyển vị trong hệ đã cho được xác định bằng tổng đại số các nội lực và chuyển vị trong hệ chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng và trong hệ chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng.

Bây giờ ta chỉ cần nghiên cứu cách biến đổi sơ đồ tính hệ đối xứng tương ứng với hai bài toán hệ chịu nguyên nhân đối xứng và hệ chịu nguyên nhân phản xứng. Ý đồ chính của biện pháp này là thay thế việc tính hệ đối xứng bằng việc tính nửa hệ với sơ đồ tính tương đương bảo đảm sao cho nội lực và biến dạng trong cả hai trường hợp là như nhau. Sau khi tìm được kết quả trên một nửa hệ ta dễ dàng suy ra kết quả trên nửa hệ còn lại theo các tính chất sau:

- \* Trong các hệ đối xứng chịu nguyên nhân đối xứng: đường biến dạng, mômen uốn, lực dọc có tính chất đối xứng, còn lực cắt có tính chất phản xứng.
- \* Trong các hệ đối xứng chịu nguyên nhân phản xứng: đường biến dạng, mômen uốn, lực dọc có tính chất phản xứng còn lực cắt có tính chất đối xứng.

Bạn đọc dễ dàng xác nhận tính chất đã nêu trên cơ sở lý luận về tính chất chẵn (đối xứng) hoặc lẻ (phản xứng) của các hàm đồng thời lưu ý đến các liên hệ vi phân đã biết giữa các hàm tải trọng, nội lực và chuyển vị.

Như vậy, dưới đây ta chỉ cần bàn về cách tìm sơ đồ tính tương đương để thực hiện tính toán với một nửa hệ.

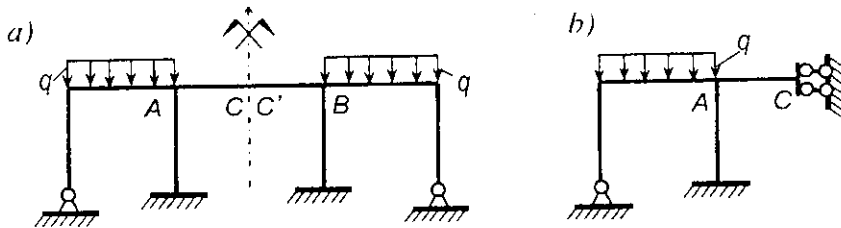
## 1. Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng

Xét hai trường hợp sau:

### a) Trục đối xứng không trùng với trục của một thanh nào của hệ

Hệ đối xứng chịu nguyên nhân đối xứng trên hình 5.42a có trục đối xứng không trùng với trục của một thanh nào của hệ. Nhận xét tiết diện  $C$  là giao điểm của trục đối xứng với thanh  $AB$  ta thấy: tiết diện  $C$  không thể xoay và cũng không thể có chuyển vị thẳng theo phương vuông góc với trục đối xứng. Thật vậy, nếu tiết diện  $C$  có chuyển vị xoay thuận chiều kim đồng hồ thì theo tính chất biến dạng đối xứng của hệ, tiết diện  $C'$  sẽ phải có chuyển vị xoay ngược chiều kim đồng hồ. Điều đó vô lý vì thực ra  $C$  và  $C'$  là một tiết diện duy nhất. Chỉ có thể loại trừ điều vô lý này khi  $C$  và  $C'$  không có chuyển vị góc. Cũng lập luận tương tự về khả năng không có chuyển vị thẳng theo phương

vuông góc với trục đối xứng. Tuy nhiên, tiết diện  $C$  vẫn có thể chuyển vị theo phương của trục đối xứng bởi vì chuyển vị này không mâu thuẫn với dạng biến dạng đối xứng của hệ. Mặt khác, lực cắt tại tiết diện  $C$  phải bằng không bởi vì biểu đồ lực cắt có tính chất phản xứng. Như vậy tiết diện  $C$  có thể chuyển vị tự do theo phương của trục đối xứng. Từ nhận xét đó ta có thể thực hiện tính toán với nửa hệ theo sơ đồ tính tương đương trong đó ta đặt tại  $C$  một ngàm trượt dưới dạng hai thanh song song có phương vuông góc với trục đối xứng như trên hình 5.42b.



Hình 5.42

**Kết luận:** Khi tính hệ đối xứng có trục đối xứng không trùng với trục của một thanh nào của hệ và chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng ta chỉ cần đặt ngàm trượt dưới dạng hai thanh song song có phương vuông góc với trục đối xứng tại những tiết diện nằm trên trục đối xứng rồi thực hiện tính toán với nửa hệ; cuối cùng suy ra kết quả trên nửa hệ còn lại theo tính chất đã nêu ở trên.

**b) Trục đối xứng trùng với trục của một hoặc một số thanh của hệ**

Hệ đối xứng chịu nguyên nhân đối xứng trên hình 5.43a thuộc trường hợp trục đối xứng trùng với trục của thanh  $AB$  và  $CD$ .

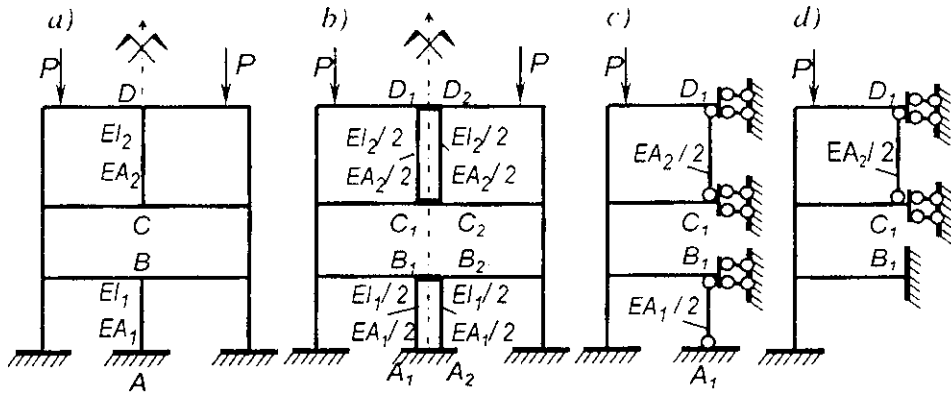
Để tìm sơ đồ tính đối với nửa hệ tương đương cho trường hợp này ta sẽ tìm cách đưa hệ về trường hợp trục đối xứng không trùng với trục của một thanh nào của hệ và vận dụng kết luận đã tìm được ở trên.

Muốn vậy ta tưởng tượng thay mỗi thanh có trục trùng với trục đối xứng bằng hai thanh; mỗi cặp hai thanh này được nối với nhau bằng các thanh vuông góc với trục đối xứng tại các đầu thanh.

Ví dụ, đối với hệ trên hình 5.38a ta thay các thanh  $AB$  và  $CD$  bằng các cặp hai thanh  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  và  $C_1D_1$ ,  $C_2D_2$  và nối những cặp thanh này với nhau bằng các thanh ngang  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$  và  $D_1D_2$  ở các đầu thanh như trên hình 5.43b. Để bảo đảm cho hệ thay thế làm việc giống hệ bị thay thế, các cặp thanh thay thế phải có nội lực và chuyển vị tương

đương với nội lực và chuyển vị trong các thanh bị thay thế.

Để thực hiện được yêu cầu đó đồng thời vẫn bảo đảm được tính chất đối xứng của hệ, mỗi thanh trong cặp hai thanh thay thế phải có độ cứng bằng nửa độ cứng của thanh bị thay thế tương ứng (tương tự bỏ dọc theo trục thanh bằng mặt cắt song song với mặt phẳng của hệ) còn các thanh nối ở đầu các cặp thanh thay thế phải có độ cứng bằng vô cùng.



Hình 5.43

Sau khi tìm được hệ thay thế (hình 5.43b) ta nhận thấy hệ này có trục đối xứng không trùng với trục của một thanh nào của hệ nên tại các tiết diện trên trục đối xứng ( $B_1, C_1, D_1$ ) của nửa hệ tương đương ta cần đặt các ngàm trượt dưới dạng hai thanh song song có phương vuông góc với trục đối xứng. Ngoài ra ta còn nhận thấy tiết diện ở đầu các thanh  $A_1/B_1$  và  $C_1/D_1$  không có chuyển vị xoay cũng như không có chuyển vị thẳng theo phương vuông góc với trục thanh nên trong thanh không phát sinh biến dạng uốn và biến dạng trượt mà chỉ có khả năng tồn tại biến dạng dọc trục. Nói khác đi, trong các thanh này không có mômen uốn và lực cắt mà chỉ tồn tại lực dọc. Do đó ta có thể thay thế các thanh này bằng các thanh có hai đầu khớp với độ cứng bằng nửa độ cứng của thanh bị thay thế lúc này có dạng như trên hình 5.43c.

**Kết luận:** Khi tính các hệ đối xứng có trục đối xứng trùng với trục của một hay một số thanh của hệ và chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng ta cần đặt ngàm trượt dưới dạng hai thanh song song có phương vuông góc với trục đối xứng đồng thời thay các thanh có trục trùng với đối xứng bằng các thanh có hai đầu khớp với độ cứng bằng nửa độ cứng của thanh bị thay thế. Sau khi thực hiện tính toán với

nửa hệ tương đương ta suy ra kết quả trên nửa hệ còn lại theo tính chất đã nêu ở trên. Khi tìm nội lực trong toàn hệ cần chú ý là lực dọc trong các thanh có trục trùng với trục đối xứng gấp hai lần lực dọc trong các thanh tương ứng khi tính với nửa hệ.

Trong trường hợp bỏ qua biến dạng dọc trục trong các thanh có trục trùng với trục đối xứng và thanh này được liên kết với đất bằng liên kết ngăn cản chuyển vị theo phương trục thanh (thanh AB) thì chuyển vị theo phương dọc trục thanh tại đầu thanh sẽ bằng không nên ta có thể đặt liên kết ngàm tại đầu các thanh có trục trùng với trục đối xứng.

Trên hình 5.43d là sơ đồ tính với nửa hệ tương đương của hệ 5.43a khi bỏ qua biến dạng dọc trục trong thanh AB.

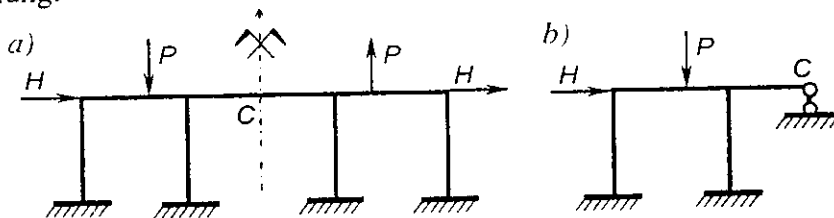
## 2. Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng

Xét hai trường hợp sau:

### a) Trục đối xứng không trùng với trục của một thanh nào của hệ

Hệ đối xứng chịu nguyên nhân phản xứng trên hình 5.44a có trục đối xứng không trùng với trục của một thanh nào của hệ. Nhận xét tiết diện C là giao điểm của trục đối xứng với thanh AB ta thấy:

- Tiết diện C có thể tự do chuyển vị xoay và chuyển vị thẳng theo phương vuông góc với trục đối xứng. Thật vậy, dưới tác dụng của các nguyên nhân phản xứng, các cặp lực đối xứng là mômen uốn và lực dọc tại C sẽ bằng không nên không có nội lực nào ngăn cản chuyển vị xoay tại C và chuyển vị thẳng tại C theo phương vuông góc với trục đối xứng.
- Tiết diện C không có khả năng chuyển vị thẳng theo phương của trục đối xứng. Thật vậy, nếu tiết diện C có chuyển vị thẳng theo phương của trục đối xứng thì hệ sẽ không thoả mãn tính chất biến dạng phản xứng.



Hình 5.44

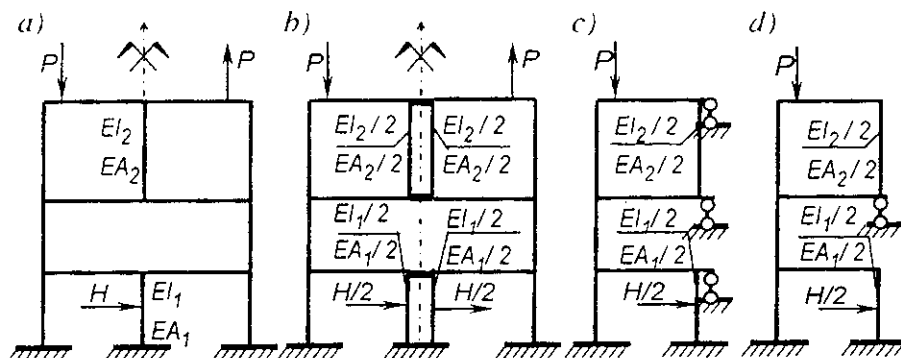
Do đó, khi tính với nửa hệ ta có thể đặt tại C một liên kết loại một

(liên kết thanh) có trục trùng với trục đối xứng (hình 5.44b).

**Kết luận:** Khi tính hệ đối xứng có trục đối xứng không trùng với trục của một thanh nào của hệ và chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng ta chỉ cần đặt liên kết thanh có trục trùng với trục đối xứng tại tiết diện nằm trên trục đối xứng rồi thực hiện tính toán với nửa hệ. Sau đó, suy ra kết quả trên nửa hệ còn lại theo tính chất đã nêu ở trên.

**b) Trục đối xứng trùng với trục của một hoặc một số thanh của hệ**

Trên hình 5.45a là một ví dụ thuộc về trường hợp này.



Hình 5. 45

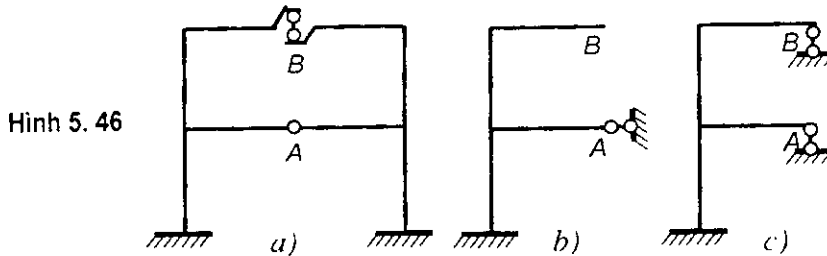
Để tìm sơ đồ tính đối với nửa hệ tương đương ta cũng lý luận tương tự như đối với hệ đã xét trên hình 5.43 và được hệ tương đương thay thế như trên hình 5.45b. Như vậy ta đã đưa hệ đang xét về trường hợp hệ đối xứng có trục đối xứng không trùng với trục của một thanh nào của hệ. Sau khi áp dụng kết luận vừa nêu ở trên ta có sơ đồ tính với nửa hệ tương đương như trên hình 5.45c.

**Kết luận:** Khi tính các hệ đối xứng có trục đối xứng trùng với trục của một hay một số thanh của hệ và chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng ta cần chia đôi độ cứng của các thanh có trục trùng với trục đối xứng đồng thời đặt tại đầu các thanh này các liên kết thanh có trục trùng với trục đối xứng. Sau khi thực hiện tính toán với nửa hệ tương đương ta suy ra kết quả trên nửa hệ còn lại theo tính chất đã nêu ở trên.

Khi tìm nội lực trong toàn hệ cần chú ý là trong thanh có trục trùng với trục đối xứng, mômen uốn và lực cắt gấp hai lần mômen uốn và lực cắt trong thanh tương ứng khi tính với nửa hệ còn lực dọc luôn luôn bằng không.

Khi tính theo phương pháp lực, để đơn giản tính toán ta có thể thay thế sơ đồ 5.45c bằng sơ đồ 5.45d nếu trong quá trình tính toán ta bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục trong các thanh có trục trùng với trục đối xứng.

**Chú thích:** Trên đây ta đã nghiên cứu cách tìm sơ đồ tính với nửa hệ cho bốn trường hợp hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng hoặc phản xứng. Đó là bốn trường hợp cơ bản, trên cơ sở lý luận này ta dễ dàng suy ra sơ đồ tính với nửa hệ cho các trường hợp khác, chẳng hạn như khi tại tiết diện trùng với trục đối xứng có đặt các liên kết khác với liên kết hàn. Trong những trường hợp này, ngoài các điều kiện như đã nêu ở trên ta còn có thêm các điều kiện thể hiện tính chất của liên kết, từ đó suy ra dạng liên kết tương ứng khi tìm sơ đồ với nửa hệ.



Ví dụ, với hệ đối xứng trên hình 5.46a ta thấy:

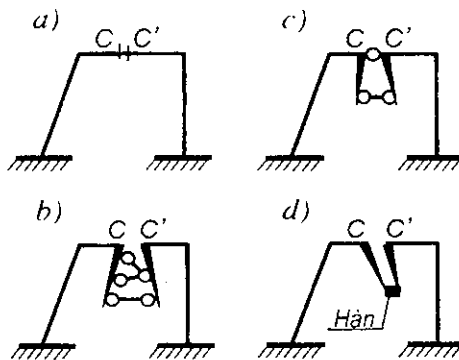
Tại tiết diện A trùng với trục đối xứng có liên kết khớp. Liên kết khớp cho ta thêm điều kiện mômen uốn tại A bằng không. Như vậy, khi hệ chịu các nguyên nhân tác dụng đối xứng, sau khi bổ sung điều kiện  $M_A = 0$  ta có thể thay liên kết ngàm trượt dưới dạng hai thanh song song có phương vuông góc với trục đối xứng (theo lý luận trên) bằng một liên kết thanh có phương vuông góc với trục đối xứng như trên hình 5.46b. Khi hệ chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng thì điều kiện  $M_A = 0$  không bổ sung điều gì mới đối với liên kết thanh có trục trùng với trục đối xứng (theo lý luận trên) nên tại A ta vẫn đặt liên kết thanh có trục trùng với trục đối xứng như trên hình 5.46c.

Tại tiết diện B trùng với trục đối xứng có liên kết thanh song song với trục đối xứng. Liên kết này cho ta thêm điều kiện  $M_B = 0$  và  $N_B = 0$ . Sau khi bổ sung thêm hai điều kiện này ta có sơ đồ tính với nửa hệ như trên hình 5.46b khi hệ chịu nguyên nhân đối xứng và như trên hình 5.46c khi hệ chịu nguyên nhân phản xứng.

## 5.8. Biện pháp thay đổi vị trí và phương của các ản

Ý đồ chính của biện pháp này là sử dụng các thanh tuyệt đối cứng, đưa hệ đã cho về hệ tương đương để thực hiện tính toán. Với biện pháp này ta có thể khéo chọn vị trí và phương của các ản sao cho cấu trúc của hệ phương trình chính tắc được đơn giản, nghĩa là có nhiều hệ số phụ bằng không.

Xét hệ siêu tĩnh trên hình 5.47a. Giả sử cắt hệ tại một tiết diện bất kỳ rồi dùng liên kết hàn gắn vào hai tiết diện  $C$  và  $C'$  ở hai bên tiết diện bị cắt hai thanh có độ cứng bằng vô cùng. Nếu nối hai thanh tuyệt đối cứng này với nhau chẳng hạn bằng ba thanh (hình 5.47b) hoặc bằng một khớp và một thanh (hình 5.47c) hoặc bằng một mối hàn (hình 5.47d) thì hệ mới và hệ đã cho sẽ làm việc hoàn toàn như nhau.

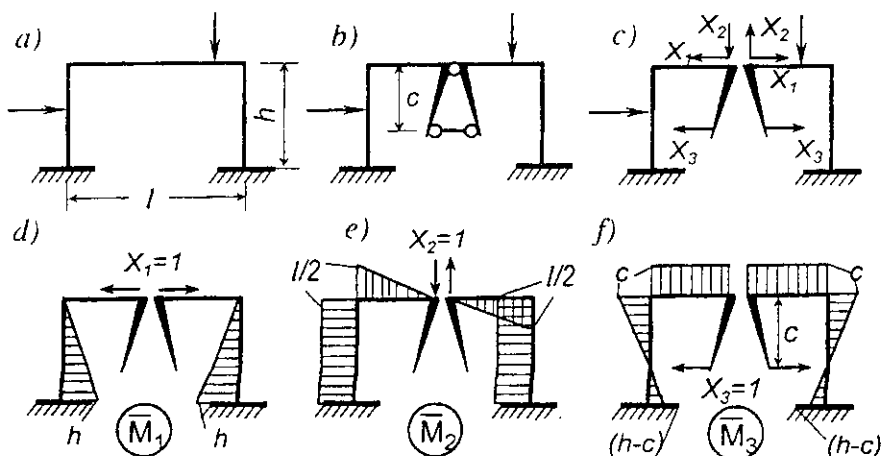


Hình 5. 47

Thật vậy, dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài, các thanh tuyệt đối cứng không biến dạng được nên hai tiết diện  $C$  và  $C'$  phải chuyển vị như nhau, nghĩa là các chuyển vị tương đối giữa chúng bằng không. Điều đó hoàn toàn thống nhất với cách làm việc của hệ đã cho ban đầu.

Sau khi đưa hệ về hệ tương đương, ta chọn hệ cơ bản bằng cách cắt các liên kết nối giữa hai thanh tuyệt đối cứng và thực hiện tính toán trên hệ tương đương như thường lệ. Vì có nhiều cách lập hệ tương đương nên ta cũng có nhiều cách chọn hệ cơ bản tương ứng hay nói khác đi, cũng có nhiều cách chọn vị trí và phương của các ẩn số. Như vậy, ta có thể chọn lựa để sao cho hệ phương trình chính tắc có càng nhiều hệ số phụ bằng không càng tốt.

Để thấy rõ được hiệu quả của biện pháp này, ta khảo sát một vài ví dụ đơn giản.



Hình 5. 48



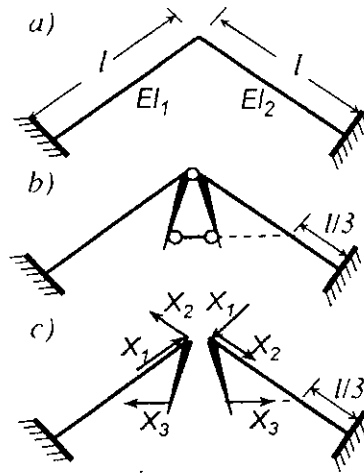
**Ví dụ 5.17.** Chọn hệ cơ bản cho khung trên hình 5.48a sao cho tất cả các hệ số phụ đều bằng không.

Hệ tương đương và hệ cơ bản tương ứng như trên hình 5.48b, c. Các biểu đồ đơn vị như trên hình 5.48d, e, f. Theo tính chất đối xứng,  $\delta_{12} = \delta_{23} = 0$ .

Muốn cho  $\delta_{13} = 0$  ta chọn  $c = 2h/3$  vì khi đó tung độ trên biểu đồ ( $\bar{M}_3$ ) tương ứng với trọng tâm của biểu đồ ( $\bar{M}_1$ ) trên thanh đứng sẽ bằng không nên kết quả nhận biểu đồ bằng không.

**Ví dụ 5.18.** Chọn hệ cơ bản cho khung có dạng đối xứng nhưng có độ cứng không đối xứng trên hình 5.49a để sao cho tất cả các hệ số phụ đều bằng không.

Trên hình 5.49b và 5.49c giới thiệu hệ tương đương và hệ cơ bản tương ứng thỏa mãn yêu cầu trên. Đề nghị bạn đọc kiểm nghiệm lại.

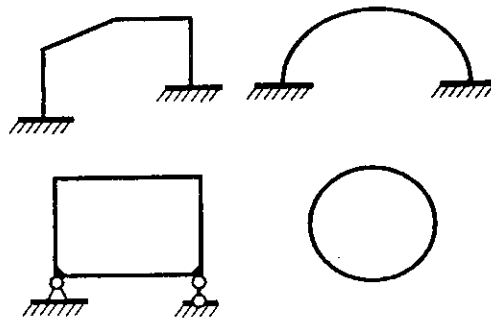


Hình 5. 49

### Tâm đàn hồi

Đối với những hệ siêu tĩnh bậc ba tạo thành một chu vi kín (hình 5.50) ta có thể sử dụng khái niệm tâm đàn hồi. Biện pháp tâm đàn hồi là một trường hợp đặc biệt của biện pháp sử dụng thanh tuyệt đối cứng đã nêu ở trên.

Giả sử xét hệ siêu tĩnh cho trên hình 5.51a. Biến đổi hệ đã cho bằng cách đặt thêm thanh tuyệt đối cứng như trên hình 5.51b. Hệ cơ bản tương ứng vẽ trên hình 5.51c. Vấn đề đặt ra là tìm vị trí của điểm C và phương của các lực  $X_1, X_2$  để sao cho tất cả các hệ số phụ đều bằng không. Lúc này hệ phương



Hình 5. 50

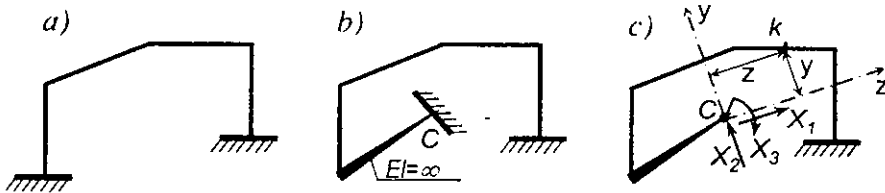
trình chính tắc có dạng:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0; \quad \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0; \quad \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0. \quad (5.48)$$

và việc giải hệ phương trình này sẽ rất dễ dàng. Điểm  $C$  có vị trí thỏa mãn với yêu cầu trên gọi là *tâm đàn hồi*.

Vị trí của tâm đàn hồi  $C$  và phương của các lực  $X_1, X_2$  được xác định theo các điều kiện  $\delta_{km} = 0$ . Trước khi lập các điều kiện này, ta cần tìm các biểu thức giải tích của mômen uốn đơn vị. Từ hình 5.51c, ta có:

$$\bar{M}_1 = -l.y; \quad \bar{M}_2 = l.z; \quad \bar{M}_3 = l.$$



Hình 5. 51

Từ các điều kiện  $\delta_{km} = 0$ , ta có:

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_3}{EI} ds = \sum \int (-y).l. \frac{ds}{EI} = 0;$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_3}{EI} ds = \sum \int z.l. \frac{ds}{EI} = 0;$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} ds = \sum \int (-y).z. \frac{ds}{EI} = 0.$$

Nếu ký hiệu  $dv = ds / EI$  và gọi là *vi phân của tải trọng đàn hồi* thì các điều kiện trên sẽ có dạng:

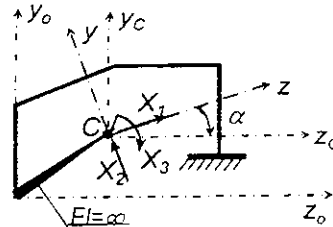
$$\sum \int y dv = 0; \quad \sum \int z dv = 0; \quad \sum \int yz dv = 0. \quad (5.49)$$

Có thể giải thích ý nghĩa của (5.49) như sau: nếu tại mỗi trọng tâm của một phân tố chiều dài  $ds$  của kết cấu ta quy ước đặt một tải trọng đàn hồi có giá trị bằng  $dv = ds / EI$  thì:

- ❖ Hai công thức đầu của (5.49) biểu thị điều kiện mômen tĩnh của các tải trọng đàn hồi đối với hệ trục  $yz$  bằng không. Do đó, *tâm đàn hồi  $C$  phải là trọng tâm của các tải trọng đàn hồi  $v$ .*
- ❖ Công thức cuối của (5.49) biểu thị điều kiện mômen quán tính ly tâm của các tải trọng đàn hồi đối với hệ trục  $yz$  bằng không. Do đó *hệ trục*

vuông góc  $yz$  phải là hệ trục quán tính chính.

Bởi vậy ta có thể sử dụng công thức xác định trọng tâm và trục quán tính chính của các lực để tìm vị trí của điểm  $C$  và phương của  $y, z$  theo thứ tự như sau:



Hình 5.52

- 1) Chọn hệ trục bất kỳ  $y_0, z_0$  (hình 5.52), xác định tọa độ  $y_{oc}$  và  $z_{oc}$  của điểm  $C$  theo công thức xác định tọa độ trọng tâm đã quen biết:

$$y_{oc} = \frac{\sum \int y_0 dv}{\sum \int dv}; \quad z_{oc} = \frac{\sum \int z_0 dv}{\sum \int dv}. \quad (5.50)$$

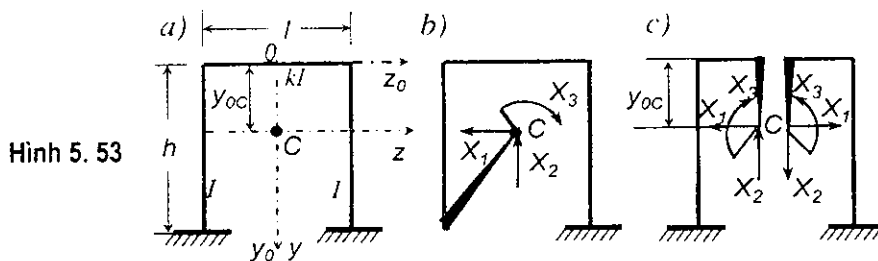
- 2) Sau khi biết vị trí của  $C$  ta chọn hệ trục tọa độ  $y_c, z_c$  đi qua tâm đàn hồi và xác định góc nghiêng  $\alpha$  giữa hệ trục quán tính chính  $y, z$  với hệ trục trung tâm  $y_c, z_c$  theo công thức:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 \sum \int z_c y_c dv}{\sum \int y_c^2 dv - \sum \int z_c^2 dv}. \quad (5.51)$$

**Chú ý:**

- ✦ Tâm đàn hồi và các trục quán tính chính của các tải trọng đàn hồi có đầy đủ tính chất của trọng tâm và của các trục quán tính chính của hệ lực. Chẳng hạn:
  - Hai trục quán tính chính luôn luôn vuông góc.
  - Nếu hệ đối xứng thì một trục chính trùng với trục đối xứng của hệ còn tâm đàn hồi cũng nằm trên trục đối xứng đó.
- ✦ Khi thiết lập các điều kiện (5.49) ta đã giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục và biến dạng trượt. Nếu kể đến các ảnh hưởng này thì hai điều kiện đầu dùng để xác định vị trí của tâm đàn hồi sẽ không thay đổi vì lúc này  $N_3 = Q_3 = 0$ ; còn điều kiện cuối cùng sẽ khác đi. Tuy nhiên ảnh hưởng này nói chung rất nhỏ.
- ✦ Việc xác định vị trí tâm đàn hồi  $C$  tương đối dễ dàng nhưng việc xác định phương của trục chính thường phức tạp. Do đó, đối với những hệ không đối xứng ta chỉ nên tìm vị trí của  $C$  để có được hai cặp hệ số phụ  $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$  và  $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$  mà không nên tìm phương của trục chính (lúc này  $\delta_{12} = \delta_{21} \neq 0$ ) vì kết quả thu được để có  $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$  không đủ bù đắp lại công sức khi tìm trục chính. Thường chỉ nên sử dụng biện pháp tâm đàn hồi khi hệ có ít nhất là một trục đối xứng.

**Ví dụ 5.19.** Tìm tâm đàn hồi của hệ trên hình 5.53a.



Hình 5.53

Khung có một trục đối xứng nên tâm đàn hồi nằm trên trục đối xứng  $y$  và ta chỉ cần tìm tung độ  $y_{0c}$ . Áp dụng công thức (5.50), ta tìm được:

$$y_{0c} = \frac{\sum \int y_0 dv}{\sum \int dv} = \frac{\int_0^h y_0 \frac{dy_0}{EI} + 0 + \int_0^h y_0 \frac{dy_0}{EI}}{\int_0^h \frac{dy_0}{EI} + \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz_0}{EI} + \int_0^h \frac{dy_0}{EI}} = \frac{kh^2}{2kh + l}$$

Một trục quán tính chính ( $y$ ) trùng với trục đối xứng còn một trục ( $z$ ) vuông góc với trục trên và đi qua  $C$ . Trên hình 5.53b và c trình bày hai kiểu chọn hệ cơ bản bằng cách dùng thanh tuyệt đối cứng để đưa các ẩn số về tâm đàn hồi.

**Ví dụ 5.20.** Vẽ biểu đồ mômen uốn trong vòm không khớp trên hình 5.54.

Phương trình trục vòm  $y = \frac{4f}{l^2} z^2$ .

Luật biến thiên của tiết diện  $I(z) = \frac{I_0}{\cos \phi}$ .

$I_0$  – mômen quán tính chính trung tâm tại tiết diện ở đỉnh vòm;

$\phi$  – góc nghiêng của tiếp tuyến với trục vòm tại tiết diện có hoành độ  $z$  so với phương của trục  $z$ .

Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt và biến dạng dọc trục.

Hệ có bậc siêu tĩnh  $n = 3$ . Để tính vòm, ta chọn hệ cơ bản như trên hình 5.54b với  $C$  là tâm đàn hồi. Tung độ  $c$  của tâm đàn hồi được xác định theo (5.50):

$$c = \frac{2 \int_0^{l/2} y dv}{2 \int_0^{l/2} dv} = \frac{\int_0^{l/2} y \frac{ds}{EI}}{\int_0^{l/2} \frac{ds}{EI}} = \frac{\int_0^{l/2} y \frac{dz}{EI \cos \phi}}{\int_0^{l/2} \frac{dz}{EI \cos \phi}} = \frac{\int_0^{l/2} y \frac{ds}{EI_0}}{\int_0^{l/2} \frac{ds}{EI_0}} = \frac{\int_0^{l/2} \frac{4f}{l^2} z^2 dz}{\int_0^{l/2} dz} = \frac{f}{3}$$

Hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0;$$

$$\delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0.$$

Xác định các hệ số chính:

Chú ý là

$$\bar{M}_1 = (y - c);$$

$$\bar{M}_2 = z;$$

$$\bar{M}_3 = 1.$$

$$\delta_{11} = 2 \int_0^{l/2} (y - c)^2 \frac{dz}{EI \cos \phi} =$$

$$= 2 \int_0^{l/2} \left[ \frac{4f}{l^2} z^2 - \frac{f}{3} \right]^2 \frac{dz}{EI_o} =$$

$$= \frac{4f^2 l}{45EI_o};$$

$$\delta_{22} = 2 \int_0^{l/2} z^2 \frac{dz}{EI \cos \phi} = 2 \int_0^{l/2} z^2 \frac{dz}{EI_o} = \frac{l^3}{12EI_o};$$

$$\delta_{33} = 2 \int_0^{l/2} \frac{dz}{EI \cos \phi} = 2 \int_0^{l/2} \frac{dz}{EI_o} = \frac{l}{EI_o}.$$

Xác định các số hạng tự do: Biểu thức giải tích của  $M_P^o$ :

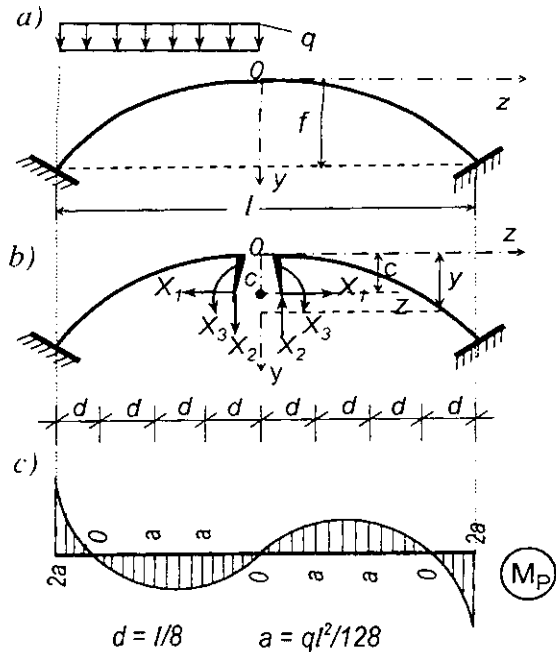
• Khi  $-l/2 \leq z \leq 0$  ta có  $M_P^o = -qz^2/2.$

• Khi  $0 \leq z \leq l/2$  ta có  $M_P^o = 0.$

Do đó:

$$\Delta_{1P} = \sum \int (y - c) M_P^o \frac{dz}{EI \cos \phi} = \int_{-l/2}^0 \left[ \frac{4f}{l^2} z^2 - \frac{f}{3} \right] \left[ -\frac{qz^2}{2} \right] \frac{dz}{EI_o} = -\frac{ql^3 f}{180EI_o};$$

$$\Delta_{2P} = \sum \int z \cdot M_P^o \frac{dz}{EI \cos \phi} = \int_{-l/2}^0 z \left[ -\frac{qz^2}{2} \right] \frac{dz}{EI_o} = -\frac{ql^4}{128EI_o};$$



Hình 5.54

$$\Delta_{3P} = \sum \int l \cdot M_P^o \frac{dz}{EI \cos \varphi} = \int_{-l/2}^0 \left[ -\frac{qz^2}{2} \right] \frac{dz}{EI_o} = -\frac{ql^3}{48EI_o}$$

Thay các  $\delta_{kk}$  và  $\Delta_{kP}$  vào hệ phương trình chính tắc, ta được:

$$X_1 = \frac{ql^2}{16f}; \quad X_2 = -\frac{3ql}{32}; \quad X_3 = \frac{ql^2}{48}$$

Biểu thức giải tích của mômen uốn:

- Trong đoạn  $-l/2 \leq z \leq 0$

$$\begin{aligned} M(z) &= \left[ \frac{4f}{l^2} z^2 - \frac{f}{3} \right] \frac{ql^2}{16f} + z \left[ -\frac{3ql}{32} \right] + l \cdot \frac{ql^2}{48} - \frac{qz^2}{2} = \\ &= -\frac{qz^2}{4} - \frac{3ql}{32} z = -\frac{ql^2}{4} \xi^2 - \frac{3ql^2}{32} \xi, \end{aligned}$$

trong đó  $\xi = z/l$ , biến thiên trong khoảng  $-0,5 \leq \xi \leq 0$ .

- Trong đoạn  $0 \leq z \leq l/2$

$$\begin{aligned} M(z) &= \left[ \frac{4f}{l^2} z^2 - \frac{f}{3} \right] \frac{ql^2}{16f} + z \left[ -\frac{3ql}{32} \right] + l \cdot \frac{ql^2}{48} + 0 = \\ &= \frac{qz^2}{4} - \frac{3ql}{32} z = \frac{ql^2}{4} \xi^2 - \frac{3ql^2}{32} \xi, \end{aligned}$$

với  $\xi = z/l$ , biến thiên trong khoảng  $0 \leq \xi \leq 0,5$ .

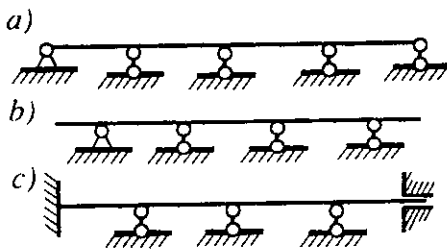
Cho  $\xi$  nhiều giá trị khác nhau ta sẽ vẽ được biểu đồ mômen uốn trong vòm (hình 5.45c).

## 5.9. Cách tính dầm liên tục đặt trên các gối cứng

Dầm liên tục là hệ chỉ có một thanh thẳng đặt trên nhiều gối tựa, số gối tựa lớn hơn hai.

Trên hình 5.55a, b, c lần lượt trình bày ba loại dầm liên tục thường gặp trong thực tế là dầm liên tục đơn giản (hình 5.55a), dầm liên tục có đầu thừa (hình 5.55b), và dầm liên tục có đầu ngàm (hình 5.55c).

Trừ trường hợp đặc biệt dầm trên hình 5.56 là tĩnh định, còn nói



Hình 5.55



Hình 5.56

chung dầm liên tục là siêu tĩnh.

Để xác định bậc siêu tĩnh của dầm liên tục ta có thể sử dụng công thức (1.3) đã nêu ở chương 1. Tuy nhiên, nếu chú ý là một dầm tĩnh định chỉ cần nối với trái đất bằng ba liên kết thanh sắp xếp hợp lý thì ta có thể tính ngay được bậc siêu tĩnh của dầm liên tục theo công thức sau:

$$n = C - 3,$$

trong đó:  $n$  – bậc siêu tĩnh của dầm liên tục;

$C$  – số liên kết tựa tương đương loại một.

Với hệ trên hình 5.55c:  $C = 8$  nên bậc siêu tĩnh của hệ bằng  $n = 8 - 3 = 5$ .

Trong thực tế, dầm liên tục thường chịu tải trọng thẳng đứng, lúc đó gối tựa cố định chỉ có hiệu quả tương đương gối tựa di động, nếu bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục. Bởi vậy trong trường hợp này ta có thể tính bậc siêu tĩnh tương ứng  $n$  của dầm theo công thức:

$$n = C_{lg} + N, \quad (5.52)$$

trong đó:

$C_{lg}$  – số gối tựa trung gian (không tính hai liên kết ở ngoài cùng) của dầm, không cần phân biệt là gối di động hay gối tựa cố định;

$N$  – số ngàm của dầm, không cần phân biệt là ngàm hay ngàm trượt.

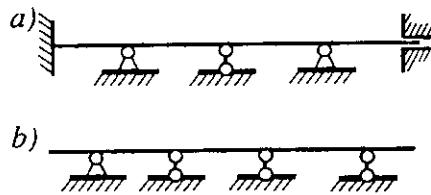
Ví dụ, trong trường hợp tải trọng tác dụng thẳng đứng:

- với hệ trên hình 5.57a, ta có:

$$C_{lg} = 3; N = 2, \text{ do đó } n = 3 + 2 = 5;$$

- với hệ trên hình 5.57b, ta có:

$$C_{lg} = 2; N = 0; \text{ vậy } n = 2.$$



Hình 5.57

Chú ý là để đảm bảo cho dầm liên tục không biến hình, ít nhất phải có một liên kết nối với trái đất có khả năng ngăn cản chuyển vị theo phương dọc trục, chẳng hạn một ngàm hay một gối tựa cố định.

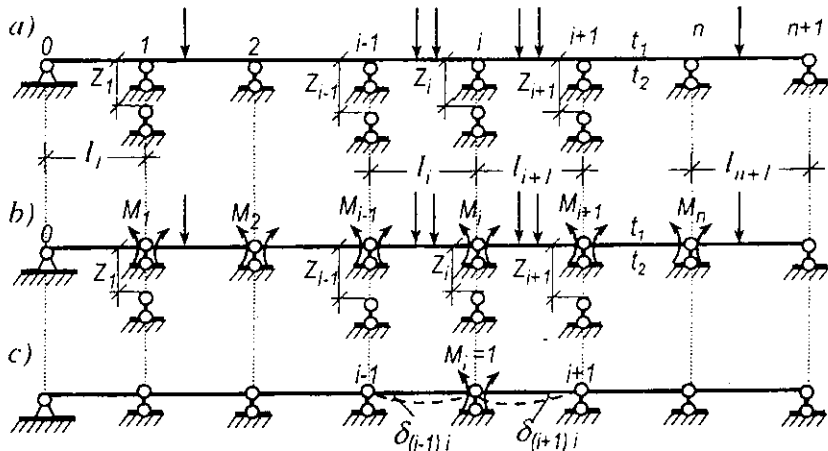
### A. Cách tính dầm liên tục theo phương trình ba mômen

Dầm liên tục chỉ là trường hợp đặc biệt của hệ siêu tĩnh nói chung nên có thể vận dụng phương pháp lực đã nghiên cứu để tính toán. Trong trường hợp này ta có thể cụ thể hóa hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực nhằm phục vụ cho việc tính toán được nhanh chóng và đơn giản hơn.

Trước tiên, ta nghiên cứu cách tính dầm liên tục đơn giản, trên cơ sở đó dễ dàng suy ra cách tính dầm liên tục có đầu thừa hoặc đầu ngàm.

Xét dầm liên tục đơn giản có tiết diện không đổi trong từng nhịp, chịu tác dụng đồng thời của tải trọng, sự biến thiên nhiệt độ và chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa như trên hình 5.58a.

Giả sử dầm có  $n$  gối tựa trung gian tức là có  $(n+1)$  nhịp; ta đánh số thứ tự các gối tựa và các nhịp theo đúng quy định như trên hình 5.58a. Với cách đánh số như vậy, theo (5.52) bậc siêu tĩnh tương ứng của hệ sẽ bằng  $n$ .



Hình 5.58

Chọn hệ cơ bản như trên hình 5.58b với các ẩn  $X_i$  là các mômen uốn  $M_i$  tại gối tựa thứ  $i$ . Như vậy hệ phương trình chính tắc sẽ biểu thị điều kiện các góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai bên mỗi gối tựa trung gian bằng không.

Hệ cơ bản vừa chọn có ưu điểm là chia dầm thành nhiều bộ phận độc lập với nhau nên sẽ cho nhiều hệ số phụ bằng không. Thật vậy, dưới tác dụng của riêng ẩn  $M_i = 1$ , biến dạng chỉ xảy ra trong hai nhịp lân cận thứ  $i$  và thứ  $(i+1)$  (hình 5.58c) do đó chỉ tồn tại các chuyển vị xoay tương đối giữa hai tiết diện (chuyển vị tương ứng với các ẩn số) ở hai bên gối tựa trung gian thứ  $(i-1)$ , thứ  $i$  và thứ  $(i+1)$ . Như vậy, với hệ cơ bản đã chọn ta có các tính chất sau:

$$\begin{aligned} \delta_{ki} = \delta_{ik} = 0 & \quad \text{khi} \quad k \neq (i-1), i \text{ và } (i+1); \\ \delta_{ki} = \delta_{ik} \neq 0 & \quad \text{khi} \quad k = (i-1), i \text{ và } (i+1). \end{aligned}$$

Lúc này, phương trình thứ  $i$  của hệ phương trình chính tắc biểu thị điều



kiện góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa trung gian thứ  $i$  bằng không, sẽ có dạng đơn giản như sau:

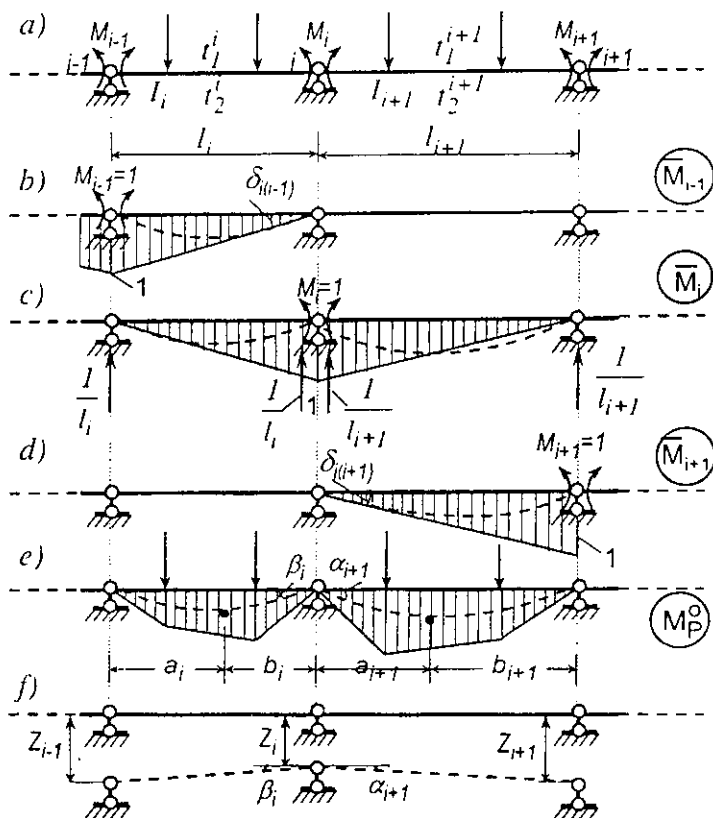
$$\delta_{i(i-1)} M_{i-1} + \delta_{ii} M_i + \delta_{i(i+1)} M_{i+1} + \Delta_{iP} + \Delta_{iZ} + \Delta_{it} = 0. \quad (5.53)$$

trong đó:

$\delta_{i(i-1)}, \delta_{ii}, \delta_{i(i+1)}$  – góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ  $i$  lần lượt do các mômen đơn vị  $M_{i-1}, M_i$  và  $M_{i+1}$  gây ra trong hệ cơ bản;

$\Delta_{iP}, \Delta_{iZ}, \Delta_{it}$  – góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ  $i$  lần lượt do tải trọng, do chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa và do sự biến thiên nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản.

Để tạo điều kiện thuận lợi cho việc tính toán, ta thiết lập sẵn các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc. Khi xác định các đại lượng này ta bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt, còn biến dạng dọc trục sẽ không tồn tại với sơ đồ tính đã chấp nhận và khi dầm chỉ chịu tải trọng vuông góc với trục dầm.



Hình 5. 59

Trên hình 5.59a, b, c, d là sơ đồ tính và các biểu đồ mômen uốn đơn vị cần thiết trong hệ cơ bản để xác định các hệ số.

Thực hiện nhân các biểu đồ, ta có:

$$\delta_{i(i-1)} = (\bar{M}_i)(\bar{M}_{i-1}) = \frac{1}{EI_i} \cdot l_i \cdot \frac{l_i}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_i}{6EI_i};$$

$$\delta_{ii} = (\bar{M}_i)(\bar{M}_i) = \frac{1}{EI_i} \cdot l_i \cdot \frac{l_i}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{EI_{i+1}} \cdot l_{i+1} \cdot \frac{l_{i+1}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{l_i}{3EI_i} + \frac{l_{i+1}}{3EI_{i+1}};$$

$$\delta_{i(i+1)} = (\bar{M}_i)(\bar{M}_{i+1}) = \frac{1}{EI_{i+1}} \cdot l_{i+1} \cdot \frac{l_{i+1}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}}.$$

Thay các trị số vừa tính được vào phương trình chính tắc (5.53) ta được:

$$\frac{l_i}{6EI_i} M_{i-1} + \left[ \frac{l_i}{3EI_i} + \frac{l_{i+1}}{3EI_{i+1}} \right] M_i + \frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}} M_{i+1} + \Delta_{iP} + \Delta_{iZ} + \Delta_{ii} = 0.$$

Biến đổi phương trình trên bằng cách nhân hai vế với  $6EI_o$ , trong đó  $I_o$  là hằng số bất kỳ thường lấy bằng mômen quán tính của một nhịp nào đó trong dầm.

$$l_i \frac{I_o}{I_i} M_{i-1} + 2 \left[ l_i \frac{I_o}{I_i} + l_{i+1} \frac{I_o}{I_{i+1}} \right] M_i + l_{i+1} \frac{I_o}{I_{i+1}} M_{i+1} + 6EI_o (\Delta_{iP} + \Delta_{iZ} + \Delta_{ii}) = 0.$$

Đặt  $\lambda_i = l_i \frac{I_o}{I_i}$ , (5.54)

và gọi là *chiều dài quy ước của nhịp i*, ta có:

$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) M_i + \lambda_{i+1} M_{i+1} + 6EI_o (\Delta_{iP} + \Delta_{iZ} + \Delta_{ii}) = 0. \quad (5.55)$$

Phương trình chính tắc (5.55) gọi là *phương trình ba mômen* biểu thị sự liên hệ giữa ba mômen uốn chưa biết ở ba gối tựa trung gian liên tiếp  $M_{i-1}$ ,  $M_i$  và  $M_{i+1}$ .

✦ Xác định số hạng tự do  $\Delta_{iP}$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản

Góc xoay tương đối  $\Delta_{iP}$  giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ  $i$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản được xác định theo công thức

$$\Delta_{iP} = (\bar{M}_i)(M_P^o),$$

trong đó  $(M_P^o)$  là biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản (hình 5.59e). Thực hiện nhân biểu đồ ta được:

$$\Delta_{iP} = \frac{\omega_i a_i}{l_i EI_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} EI_{i+1}}, \quad (5.56)$$

trong đó:

$\omega_i$  và  $\omega_{i+1}$  – diện tích biểu đồ mômen uốn ( $M_p^o$ ) tại nhịp  $i$  và nhịp  $(i+1)$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản;

$a_i, b_i$  – khoảng cách từ trọng tâm của biểu đồ mômen uốn ( $M_p^o$ ) trong nhịp  $i$  tính đến gối tựa trái và gối tựa phải của nhịp đó;

$a_{i+1}, b_{i+1}$  – các khoảng cách từ trọng tâm của biểu đồ mômen uốn ( $M_p^o$ ) trong nhịp  $(i+1)$  tính đến gối tựa trái và gối tựa phải của nhịp đó.

✦ Xác định số hạng tự do  $\Delta_{iZ}$  do chuyển vị gối tựa gây ra trong hệ cơ bản

Góc xoay tương đối  $\Delta_{iZ}$  giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa  $i$  do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa gây ra trong hệ cơ bản được xác định theo (5.13):

$$\Delta_{iZ} = - \sum_j \bar{R}_{ji} Z_j,$$

trong đó:

$\bar{R}_{ji}$  – phản lực tại gối  $j$  của hệ do các mômen  $M_i = 1$  gây ra trong hệ cơ bản;

$Z_j$  – chuyển vị cưỡng bức tại gối tựa thứ  $j$ .

Nếu quy ước các chuyển vị lún xuống dưới là dương ta được:

$$\Delta_{iZ} = - \left[ -\frac{1}{l_i} Z_{i-1} + \frac{1}{l_i} Z_i + \frac{1}{l_{i+1}} Z_i - \frac{1}{l_{i+1}} Z_{i+1} \right],$$

hay

$$\Delta_{iZ} = \left[ \frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}} \right], \quad (5.57)$$

trong đó  $Z_{i-1}, Z_i, Z_{i+1}$  – độ lún tại các gối tựa thứ  $(i-1)$ , thứ  $i$  và thứ  $(i+1)$  với quy ước hướng xuống phía dưới là dương.

Cũng có thể thiết lập được công thức (5.57) qua hình 5.59f.  $\Delta_{iZ}$  chính là tổng hai góc  $\beta_i$  và  $\alpha_{i+1}$  ở hai bên gối tựa  $i$ :

$$\Delta_{iZ} = \beta_i + \alpha_{i+1} \approx \text{tg}\beta_i + \text{tg}\alpha_{i+1} = \left[ \frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}} \right].$$

✦ Xác định số hạng tự do  $\Delta_{it}$  do sự thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản

Góc xoay tương đối  $\Delta_{it}$  giữa hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ  $i$  do sự thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản được xác định theo công thức (5.11).

Nếu chú ý là lực dọc trong dầm bằng không, ta có:

$$\Delta_{it} = \left[ \frac{\alpha l_i}{2h_i} (t_{2i} - t_{1i}) + \frac{\alpha l_{i+1}}{2h_{i+1}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \right]. \quad (5.58)$$

trong đó:

$h_i, h_{i+1}$  – chiều cao của tiết diện dầm tại nhịp thứ  $i$  và  $(i+1)$ ;

$t_{1i}, t_{1(i+1)}$  – độ biến thiên nhiệt độ tại thớ trên của nhịp thứ  $i$  và  $(i+1)$ ;

$t_{2i}, t_{2(i+1)}$  – độ biến thiên nhiệt độ tại thớ dưới của nhịp thứ  $i$  và  $(i+1)$ .

Thay các số hạng tự do đã tính được vào phương trình chính tắc (5.55) ta được phương trình ba mômen viết cho gối tựa trung gian thứ  $i$ :

$$\begin{aligned} & \lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) M_i + \lambda_{i+1} M_{i+1} + 6I_o \left[ \frac{\omega_i a_i}{l_i I_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} I_{i+1}} \right] + \\ & + 6EI_o \left[ \frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}} \right] + \\ & + 6EI_o \left[ \frac{\alpha l_i}{2h_i} (t_{2i} - t_{1i}) + \frac{\alpha l_{i+1}}{2h_{i+1}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \right] = 0. \quad (5.59) \end{aligned}$$

Trường hợp dầm có tiết diện không đổi trong tất cả các nhịp ( $I = const$ ) ta có thể lấy  $I_o = I$ , lúc đó phương trình ba mômen sẽ có dạng:

$$\begin{aligned} & l_i M_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1}) M_i + l_{i+1} M_{i+1} + 6 \left[ \frac{\omega_i a_i}{l_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}} \right] + \\ & + 6EI \left[ \frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}} \right] + \\ & + 3EI\alpha \left[ \frac{l_i}{h_i} (t_{2i} - t_{1i}) + \frac{l_{i+1}}{h_{i+1}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \right] = 0. \quad (5.60) \end{aligned}$$

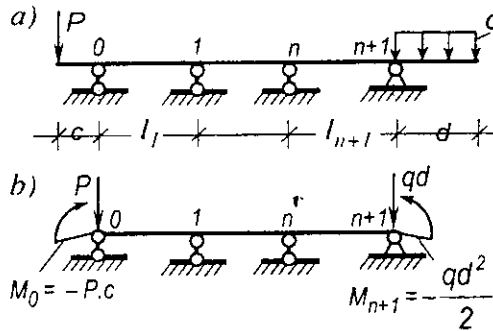
Ứng với mỗi gối trung gian của dầm liên tục ta có một phương trình ba mômen, như vậy với dầm liên tục có bậc siêu tĩnh bằng  $n$  ta sẽ viết được  $n$

phương trình ba mômen cho  $n$  gối trung gian, đủ để xác định  $n$  ẩn số  $M_i$ .

**\* Trường hợp dầm liên tục có đầu thừa**

Ta có thể đưa dầm có đầu thừa chịu tải trọng (hình 5.60a) về dầm liên tục đơn giản (hình 5.60b) bằng cách cắt bỏ các đầu thừa và thay tác dụng của phần đầu thừa bằng những ngoại lực đặt ở các gối biên của dầm liên tục đơn giản.

Nội lực trong dầm liên tục đơn giản trên hình 5.60b được xác định bằng cách sử dụng phương trình ba mômen với mômen uốn tại các gối biên của dầm đã biết, chúng có giá trị bằng mômen tập trung  $M_0$  và  $M_{n+1}$ .

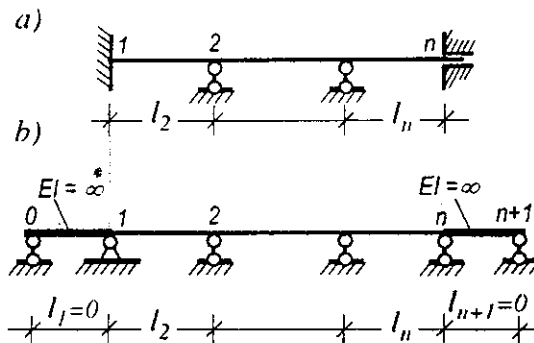


Hình 5. 60

Cũng có thể coi các mômen tập trung ở hai đầu dầm như ngoại lực đặt trong nhịp thứ nhất và thứ  $(n+1)$ . Lúc này, mômen tựa  $M_0$  và  $M_{n+1}$  sẽ bằng không còn các đại lượng  $\omega_1$  và  $\omega_{n+1}$  cần được bổ sung phản ảnh hưởng do các mômen tập trung đó gây ra. Cách này thường phức tạp nên ít được sử dụng.

**\* Trường hợp dầm liên tục có đầu ngàm**

Trong trường hợp dầm liên tục trên hình 5.61a, ta tưởng tượng thay ngàm và ngàm trượt bằng cách đặt thêm nhịp quy đổi ở hai đầu dầm. Nhịp quy đổi có chiều dài bằng không hoặc có độ cứng  $EI = \infty$  và có số liên kết tương đương với ngàm (hình 5.61b).



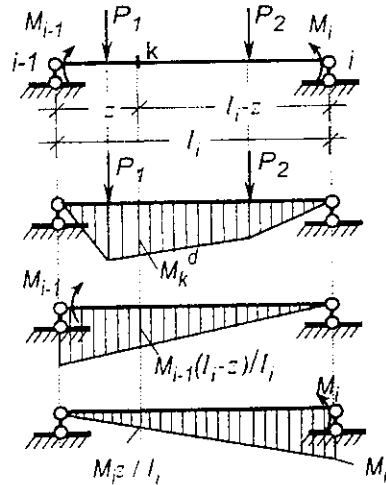
Hình 5. 61

Ta đã đưa bài toán dầm liên tục có đầu ngàm về bài toán dầm liên tục đơn giản và có thể áp dụng được phương trình ba mômen như thường lệ.

Như vậy, đối với mỗi dầm liên tục bất kỳ khi quy về dầm liên tục đơn giản tương ứng, ta thiết lập được hệ phương trình ba mômen viết cho tất cả các gối trung gian. Sau khi giải hệ phương trình sẽ tìm được tất cả các mômen uốn tại các gối tựa gọi là *mômen tựa*.

Bây giờ còn phải xác định giá trị mômen uốn và lực cắt tại một tiết diện bất kỳ trong các nhịp của dầm liên tục.

Ta xem mỗi nhịp dầm liên tục như một dầm đơn giản đặt tự do trên hai gối ở hai đầu nhịp, chịu tải trọng và các mômen uốn đã xác định được từ hệ phương trình ba mômen. Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng (hình 5.62) ta sẽ tìm được biểu thức mômen uốn tại một tiết diện bất kỳ  $k$  có hoành độ  $z$  trong nhịp thứ  $i$  của dầm liên tục như sau:



Hình 5.62

$$M_k = M_k^d + \frac{l_i - z}{l_i} M_{i-1} + \frac{z}{l_i} M_i, \quad (5.61)$$

trong đó  $M_k^d$  – mômen uốn tại tiết diện  $k$  do tải trọng gây ra trong dầm đơn giản đặt tự do trên hai gối tựa ở hai đầu nhịp.

Từ liên hệ vi phân đã biết ta tìm được biểu thức lực cắt tại tiết diện  $k$  của dầm liên tục:

$$Q_k = \frac{dM_k}{dz} - m = Q_k^d + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} - m, \quad (5.62)$$

trong đó  $Q_k^d$  – lực cắt tại tiết diện  $k$  do tải trọng gây ra trong dầm đơn giản đặt tự do trên hai gối tựa ở hai đầu nhịp.

Để tìm phản lực tại gối tựa bất kỳ thứ  $i$ , ta chỉ cần xét cân bằng của phần dầm bị cắt xung quanh gối tựa thứ  $i$ .

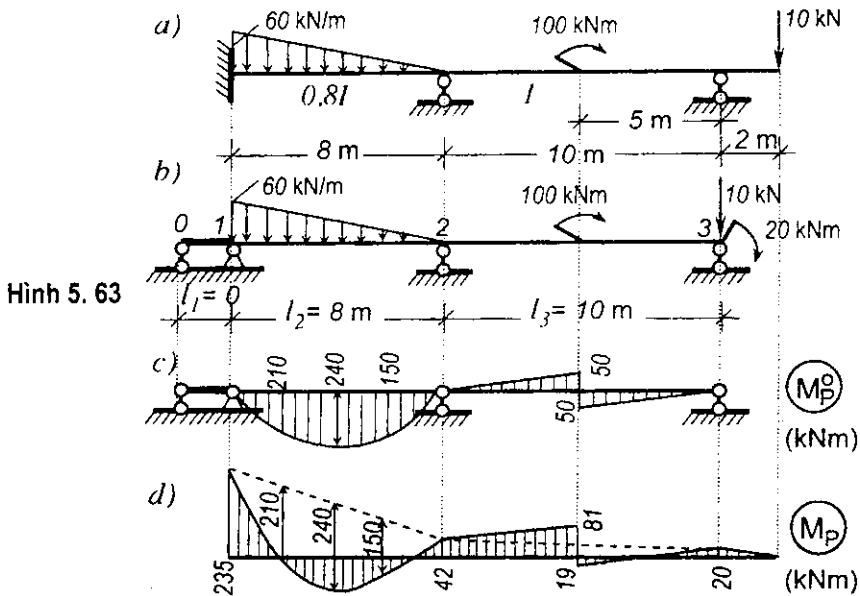
**Ví dụ 5.21.** Vẽ biểu đồ mômen uốn trong dầm liên tục trên hình 5.63a.

Sau khi cắt bỏ đầu thừa, thay tác dụng của phần này bằng các lực đặt ở gối biên bên phải và thay ngàm bên trái bằng một nhịp có chiều dài  $l_1=0$  ta được sơ đồ tính tương đương như trên hình 5.63b là dầm liên tục đơn

giản. Đánh số các gối tựa và nhịp như trên hình 5.63b.

Chọn  $I_o = I$ , theo (5.54) chiều dài quy ước của các nhịp sẽ là

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = \frac{8I_o}{0,8I} = 10 \text{ m}; \quad \lambda_3 = \frac{10I_o}{I} = 10 \text{ m}.$$



1) Lập phương trình ba mômen cho các gối trung gian (gối 1, 2), ta có:

$$\text{khi } i = 1: \quad \lambda_1 M_0 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)M_1 + \lambda_2 M_2 + 6I \left[ \frac{\omega_1 a_1}{l_1 I} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2 \cdot 0,8I} \right] = 0;$$

$$\text{khi } i = 2: \quad \lambda_2 M_1 + 2(\lambda_2 + \lambda_3)M_2 + \lambda_3 M_3 + 6I \left[ \frac{\omega_2 a_2}{l_2 \cdot 0,8I} + \frac{\omega_3 b_3}{l_3 I} \right] = 0.$$

2) Vẽ biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản. Kết quả như trên hình 5.63c.

3) Xác định các đại lượng trong số hạng tự do của hệ phương trình ba mômen. Khi xác định các đại lượng thuộc nhịp thứ ba cần chú ý: tuy diện tích  $\omega_3 = 0$  nhưng trọng tâm của hai hình tam giác bằng nhau, trái dấu ở xa vô cùng nên tích số  $\omega_3 b_3$  là vô định. Để khử vô định ta cần xem diện tích  $\omega_3$  là hai hình tam giác, tính các tích  $\omega b$  riêng biệt cho từng hình rồi cộng kết quả.

• Nhịp 1:  $\omega_1 = 0; a_1 = 0$ .

• Nhịp 2:  $\omega_2 = \frac{ql^3}{24} = \frac{60 \cdot 8^3}{24} = 1280 \text{ kNm}^2$ ;  $a_2 = \frac{7}{15} l_2 = \frac{7}{15} \cdot 8 = \frac{56}{15} \text{ m}$ ;  
 $b_2 = \frac{8}{15} l_2 = \frac{8}{15} \cdot 8 = \frac{64}{15} \text{ m}$ .

• Nhịp 3:  $\omega_3 b_3 = -\frac{5 \cdot 50}{2} \left( 5 + \frac{5}{3} \right) + \frac{5 \cdot 50}{2} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3} = -\frac{1250}{3} \text{ kNm}^3$ .

4) Thay trị số của các hệ số vào hệ phương trình ba mômen đồng thời chú ý là  $M_3 = -20 \text{ kNm}$ ; ta có:

$$0 + 2(0+10)M_1 + 10M_2 + 6I \left[ 0 + \frac{1280}{8 \cdot 0,81} \cdot \frac{64}{15} \right] = 0 ;$$

$$10M_1 + 2(10+10)M_2 + 10(-20) + 6I \left[ \frac{1280}{8 \cdot 0,81} \cdot \frac{56}{15} - \frac{1250}{3 \cdot 101} \right] = 0 .$$

Hay  $2M_1 + M_2 + 512 = 0$ ;  $M_1 + 4M_2 + 403 = 0$ .

5) Giải hệ phương trình, ta được  $M_1 = -235 \text{ kNm}$ ;  $M_2 = -42 \text{ kNm}$ .

6) Tìm biểu đồ mômen uốn tổng cộng. Sau khi đã tìm được các mômen tựa  $M_1, M_2, M_3$  ta vẽ biểu đồ mômen uốn trong hệ cơ bản do riêng các mômen tựa gây ra. Trong mỗi nhịp biểu đồ này có dạng đường thẳng nối liền các tung độ biểu thị mômen tựa ở hai đầu nhịp (đường đứt nét trên hình 5.63d). Gọi biểu đồ này là *biểu đồ mômen tựa* và ký hiệu là  $(M_{tựa})$ . Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể vẽ biểu đồ mômen uốn tổng cộng theo biểu thức sau:

$$(M_p) = (M_p^o) + (M_{tựa})$$

Kết quả tìm được như trên hình 5.63d (chú ý là cân bố sung phần biểu đồ mômen uốn ở đầu thừa bên phải).

**Ví dụ 6.22.** Vẽ biểu đồ mômen uốn trong dầm liên tục trên hình 5.64a khi gối 0 lún xuống một đoạn bằng  $\Delta$  và ngàm xoay ngược chiều kim đồng hồ một góc  $\varphi = \Delta/l$ . Cho biết  $EI = const$ .

Trên hình 5.64b trình bày cách đưa dầm có đầu ngàm về dầm liên tục đơn giản. Nếu cho gối 3 của dầm thay thế dịch chuyển thẳng đứng một đoạn  $Z_3 = -\varphi l_3 = -\Delta(l_3/l)$  (hướng lên trên) đồng thời cho  $l_3$  tiến tới không thì cách làm việc của dầm này hoàn toàn giống cách làm việc của dầm cho ban đầu.

Thiết lập các phương trình ba mômen cho gối 1 và 2, theo (5.60) ta có:

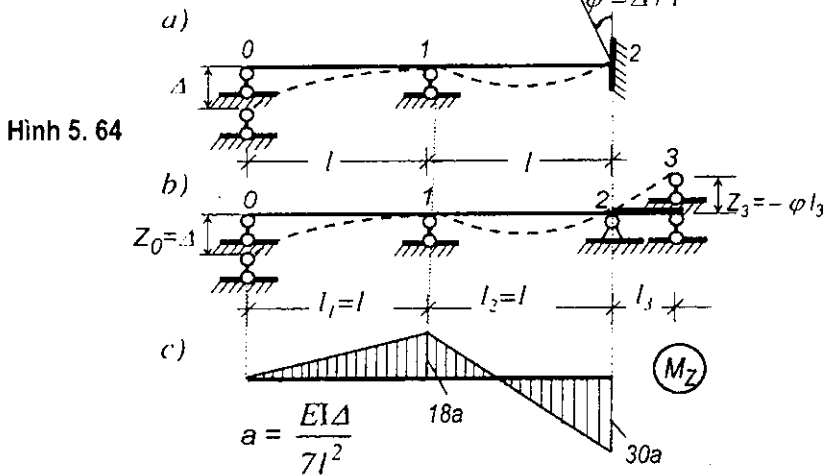


$$l_1 M_0 + 2(l_1 + l_2)M_1 + l_2 M_2 + 6EI \left[ \frac{Z_0 - Z_1}{l_1} + \frac{Z_2 - Z_1}{l_2} \right] = 0;$$

$$l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3)M_2 + l_3 M_3 + 6EI \left[ \frac{Z_1 - Z_2}{l_2} + \frac{Z_3 - Z_2}{l_3} \right] = 0.$$

trong đó:  $l_1 = l_2 = l$ ;  $l_3 = 0$ ;  $M_0 = M_3 = 0$ ;

$$Z_0 = \Delta; Z_1 = Z_2 = 0; Z_3 = -\Delta l_3 / l.$$



Sau khi thay thế những giá trị này vào hai phương trình trên, ta có:

$$4M_1 + M_2 + \frac{6EI\Delta}{l^2} = 0; \quad M_1 + 2M_2 - \frac{6EI\Delta}{l^2} = 0.$$

Kết quả giải hệ phương trình:

$$M_1 = -\frac{18EI\Delta}{7l^2}; \quad M_2 = +\frac{30EI\Delta}{7l^2}.$$

Trên hình 5.64c vẽ biểu đồ mômen tự. Biểu đồ này cũng là biểu đồ cân tìm vì trên hệ không có tải trọng.

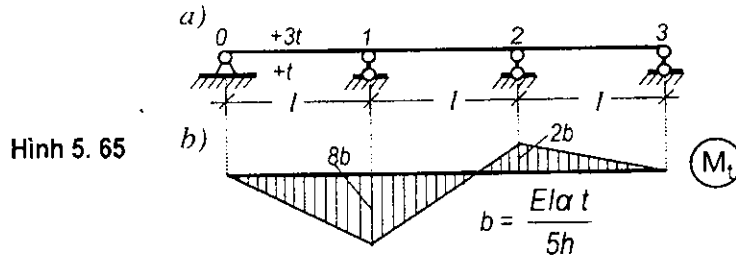
**Ví dụ 5.23.** Vẽ biểu đồ mômen uốn trong dầm liên tục chịu sự biến thiên nhiệt độ như trên hình 5.65a. Cho biết dầm có tiết diện hình chữ nhật với  $EI = const$ ;  $h = const$ .

Phương trình ba mômen viết cho gối 1 và gối 2:

$$l_1 M_0 + 2(l_1 + l_2)M_1 + l_2 M_2 + 3EI\alpha \left[ \frac{l_1}{h_1} (t_{21} - t_{11}) + \frac{l_2}{h_2} (t_{22} - t_{12}) \right] = 0;$$

$$l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3)M_2 + l_3 M_3 + 3EI \alpha \left[ \frac{l_2}{h_2} (t_{22} - t_{12}) + \frac{l_3}{h_3} (t_{23} - t_{13}) \right] = 0,$$

trong đó:  $l_1 = l_2 = l_3 = l$ ;  $M_0 = M_3 = 0$ ;  $h_1 = h_2 = h_3 = h$ ;  
 $t_{21} = +t$ ;  $t_{11} = +3t$ ;  $t_{22} = t_{12} = t_{23} = t_{13} = 0$ .



Thay các số liệu trên vào hệ phương trình và giải ra ta được:

$$M_1 = \frac{8EI\alpha t}{5h}; \quad M_2 = -\frac{2EI\alpha t}{5h}$$

Biểu đồ mômen uốn cần tìm vẽ trên hình 5.65b.

### B. Cách tính dầm liên tục theo phương pháp tiêu cự mômen

Khi tính các dầm liên tục nhiều nhịp, nếu dùng phương trình ba mômen thì khối lượng tính toán vẫn còn khá lớn vì phải thiết lập và giải một hệ nhiều phương trình ba mômen. Trong những trường hợp này ta có thể dùng phương pháp tiêu cự mômen.

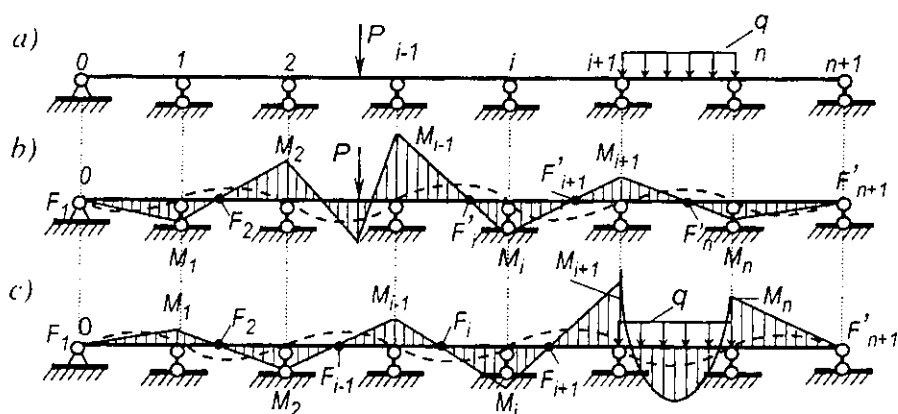
Để trình bày được đơn giản ta giả thiết dầm liên tục chỉ chịu tác dụng của tải trọng. Trên cơ sở này bạn đọc có thể phát triển cách tính để giải bài toán khi dầm chịu tác dụng của các nguyên nhân khác.

Thực chất của phương pháp tiêu cự mômen là vận dụng khéo léo các phương trình ba mômen để tính dầm liên tục nhiều nhịp với điều kiện là *tải trọng chỉ tác dụng trên một nhịp*. Như vậy, trong phương pháp này, nếu cần tính dầm liên tục nhiều nhịp chịu tải trọng tác dụng trên một số nhịp của dầm ta cần áp dụng nguyên lý cộng tác dụng để đưa về các bài toán trong đó dầm chỉ chịu tải trọng trên một nhịp. Ví dụ, với hệ trên hình 5.66a ta cần phải phân ra thành hai bài toán như trên hình 5.66b và 5.66c.

Như vậy, nếu tìm cách vẽ nhanh được biểu đồ mômen uốn trong dầm liên tục khi tải trọng chỉ đặt ở một nhịp dầm thì ta cũng có thể vẽ nhanh được biểu đồ mômen uốn trong dầm liên tục chịu tải trọng đặt trên một số nhịp dầm.

Quan sát kết quả tính các dầm 5.66b và 5.66c ta có các nhận xét sau:

1) Đường đàn hồi (đường đứt nét) của dầm lượn theo hình sóng kế tiếp nhau khi tải trọng chỉ tác dụng trên một nhịp dầm.



Hình 5.66

2) Trong những nhịp không chịu tải trọng, mômen uốn ở hai gối tựa kế tiếp nhau luôn luôn ngược dấu, mômen uốn tại gối tựa gần nhịp chịu tải trọng có giá trị lớn hơn. Biểu đồ mômen uốn trong những nhịp này có dạng đường thẳng. Những đường thẳng này cắt đường chuẩn tại những điểm (biểu thị mômen uốn bằng không) tương ứng với những điểm uốn trên đường đàn hồi của dầm. Ta gọi những điểm này là *tiêu điểm mômen*.

Trên hình 5.66b tiêu điểm  $F_1, F_2$  nằm ở bên trái nhịp có tải trọng, và trên hình 5.66c những tiêu điểm  $F_1, F_2, F_{i-1}, F_i, F_{i+1}$  nằm ở bên trái nhịp có tải trọng. Ta gọi những tiêu điểm ở bên trái nhịp có tải trọng là *những tiêu điểm trái*.

Trên hình 5.66b, những tiêu điểm  $F'_i, F'_{i+1}, F'_{i+2}, \dots, F'_{n+1}$  nằm ở bên phải nhịp có tải trọng, và trên hình 5.66c tiêu điểm  $F'_{n+1}$  nằm ở bên phải nhịp có tải trọng. Ta gọi những tiêu điểm nằm bên phải nhịp chịu tải trọng là *những tiêu điểm phải*.

Như vậy, ở mỗi nhịp sẽ có hai tiêu điểm, chẳng hạn đối với nhịp  $i$  có hai tiêu điểm: tiêu điểm trái  $F_i$  và tiêu điểm phải  $F'_i$ .

3) Vị trí của tiêu điểm mômen trong mỗi nhịp không chịu tải trọng sẽ được xác định nếu biết tỷ số giữa hai mômen uốn tại gối tựa ở hai đầu nhịp. Do đó, ta định nghĩa: *tỷ số dương lớn hơn đơn vị giữa hai mômen uốn ở hai gối tựa trong nhịp không chịu tải trọng là tỷ số tiêu cự mômen*.

Nếu nhịp thứ  $i$  nằm bên trái nhịp có tải trọng thì gối tựa thứ  $i$  gần nhịp có tải trọng hơn gối tựa thứ  $i-1$  cho nên mômen uốn  $M_i$  lớn hơn và ngược dấu với mômen uốn  $M_{i-1}$ , lúc đó ta gọi tỷ số tiêu cự của nhịp  $i$  là *tỷ số tiêu cự trái*  $k_i$ :

$$k_i = -\frac{M_i}{M_{i-1}}. \quad (5.63)$$

Nếu nhịp thứ  $i$  nằm ở bên phải nhịp có tải trọng thì gối tựa thứ  $i-1$  ở gần nhịp có tải trọng hơn gối tựa thứ  $i$  cho nên mômen uốn  $M_{i-1}$  lớn hơn và ngược dấu với mômen uốn  $M_i$ , lúc này ta gọi tỷ số tiêu cự mômen của nhịp  $i$  là *tỷ số tiêu cự phải*  $k'_i$ :

$$k'_i = -\frac{M_{i-1}}{M_i}. \quad (5.64)$$

Sau này, ta sẽ thấy các tỷ số tiêu cự hay nói khác đi là *vị trí của các tiêu điểm không phụ thuộc vị trí, độ lớn và dạng tải trọng mà chỉ phụ thuộc kích thước của dầm*.

4) Từ các biểu đồ mômen uốn của hệ trên hình 5.66b và 5.66c ta nhận thấy có thể vẽ ngay được các biểu đồ đó nếu biết hai yếu tố sau:

\* Mômen tựa ở hai bên nhịp có tải trọng.

\* Vị trí các tiêu điểm mômen trên từng nhịp hay nói khác đi là các tỷ số tiêu cự trái của các nhịp ở bên trái nhịp có tải trọng và các tỷ số tiêu cự phải của các nhịp ở bên phải nhịp có tải trọng.

Dưới đây ta sẽ lần lượt tìm cách xác định hai yếu tố này.

### 1. Xác định các tỷ số tiêu cự trái và phải

Ta hãy thiết lập công thức xác định tỷ số tiêu cự trái  $k_i$  cho nhịp thứ  $i$ .

Xét hai nhịp không chịu tải trọng và ở bên trái nhịp có tải trọng (hình 5.67).

Viết phương trình ba mômen cho gối tựa  $i-1$  của dầm:

$$\lambda_{i-1} M_{i-2} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i) M_{i-1} + \lambda_i M_i = 0.$$

Phương trình này không có số hạng tự do bởi vì các nhịp này không chịu tải trọng. Biến đổi phương trình trên bằng cách chia hai vế cho  $M_{i-1}$  ta có:

$$\lambda_{i-1} \frac{M_{i-2}}{M_{i-1}} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i) + \lambda_i \frac{M_i}{M_{i-1}} = 0.$$

Theo định nghĩa về tỷ số tiêu cự trái ta có:

$$\frac{M_{i-1}}{M_{i-2}} = k_{i-1} \quad \text{và} \quad -\frac{M_i}{M_{i-1}} = k_i,$$

nên có thể viết phương trình trên dưới dạng:

$$-\lambda_{i-1} \frac{l}{k_{i-1}} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i) - \lambda_i k_i = 0.$$

Suy ra

$$k_i = 2 + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \left[ 2 - \frac{l}{k_{i-1}} \right]. \quad (5.65)$$

Công thức này có tính chất truy hồi nghĩa là có thể tính được tỷ số tiêu cự trái  $k_i$  ở nhịp  $i$  nếu biết tỷ số tiêu cự trái  $k_{i-1}$  ở nhịp thứ  $i-1$  v.v...

Ta tìm được ngay tỷ số tiêu cự trái của nhịp thứ nhất  $k_1$  như sau:

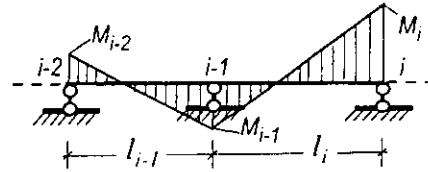
✦ Nếu nhịp thứ nhất có đầu bên trái là khớp (hình 5.68a) thì mômen uốn ở khớp phải bằng không nghĩa là  $M_0 = 0$ . Do đó, theo định nghĩa tỷ số tiêu cự trái của nhịp thứ nhất:

$$k_1 = -\frac{M_1}{M_0} = -\frac{M_1}{0}.$$

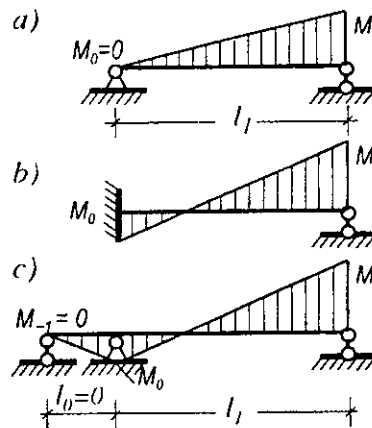
Vì  $M_1$  là lượng hữu hạn nên  $k_1 = \infty$ .

✦ Nếu nhịp thứ nhất có đầu bên trái là ngàm (hình 5.68b) thì ta tưởng tượng thay ngàm bằng một nhịp có độ dài vô cùng bé như trên hình 5.68c. Lúc đó  $M_{-1} = 0$ , còn  $M_0$  bằng một lượng hữu hạn nào đó. Theo định nghĩa tỷ số tiêu cự trái của nhịp số 0, ta có  $k_0 = \infty$ . Từ công thức truy hồi (5.65) ta tính được tỷ số tiêu cự trái của nhịp thứ nhất với  $i = 1$ :

$$k_1 = 2 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \left[ 2 - \frac{l}{k_0} \right] = 2 + \frac{0}{\lambda_1} \left[ 2 - \frac{l}{\infty} \right] = 2.$$



Hình 5.67



Hình 5.68

Tóm lại:

- ❖ nếu nhịp đầu tiên của dầm liên tục có đầu trái là khớp thì  $k_1 = \infty$ ;
- ❖ nếu nhịp đầu tiên của dầm liên tục có đầu trái là ngàm thì  $k_1 = 2$ .

Sau khi đã biết tỷ số tiêu cự trái  $k_1$  của nhịp đầu tiên, dựa vào (5.65) ta sẽ tìm được tỷ số tiêu cự trái của nhịp bất kỳ thứ  $i$  bằng cách lần lượt tính  $k_2, k_3, k_4, \dots$

Tương tự như thế, nếu xét hai nhịp dầm không chịu tải trọng và ở bên phải nhịp có tải trọng ta sẽ lập được công thức cho phép tính truy hồi tỷ số tiêu cự phải như sau:

$$k'_i = 2 + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \left[ 2 - \frac{1}{k'_{i+1}} \right]. \quad (5.66)$$

Dùng công thức (5.66) ta có thể tìm được tỷ số tiêu cự phải ở nhịp thứ  $i$  nếu đã biết tỷ số tiêu cự phải ở nhịp thứ  $i+1$ . Cũng lý luận như trên, nếu dầm có  $n+1$  nhịp, thì tỷ số tiêu cự phải của nhịp cuối cùng thứ  $n+1$  được xác định như sau:

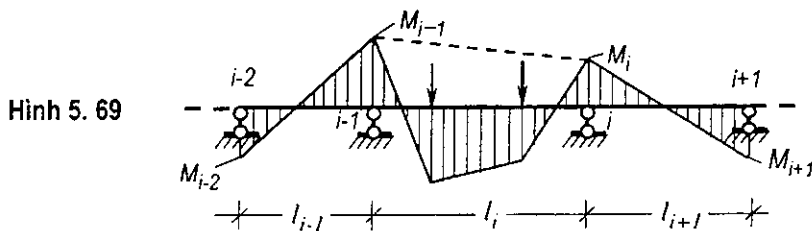
- ❖ nếu nhịp cuối cùng có đầu bên phải là khớp thì  $k'_{n+1} = \infty$ ;
- ❖ nếu nhịp cuối cùng có đầu bên phải là ngàm thì  $k'_{n+1} = 2$ .

Do đó ta sẽ tìm được tỷ số tiêu cự phải cho bất kỳ nhịp dầm nào.

Nhận xét công thức (5.65) và (5.66) ta thấy các tỷ số tiêu cự trái và phải chỉ phụ thuộc độ dài quy ước của các nhịp dầm, không phụ thuộc tải trọng.

## 2. Xác định mômen tựa ở hai bên nhịp có tải trọng

Giả sử nhịp  $i$  là nhịp có tải trọng tác dụng, yêu cầu xác định giá trị của hai mômen tựa  $M_{i-1}$  và  $M_i$  ở hai bên nhịp có tải trọng (hình 5.69).



Viết các phương trình ba mômen cho gối tựa thứ  $i-1$  và gối tựa thứ  $i$ , ta được:

$$\lambda_{i-1} M_{i-2} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i)M_{i-1} + \lambda_i M_i + 6EI_o \Delta_{(i-1)P} = 0;$$

$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})M_i + \lambda_{i+1} M_{i+1} + 6EI_o \Delta_{iP} = 0.$$

Trong hai phương trình này có bốn ẩn chưa biết là các mômen tựa  $M_{i-2}$ ,  $M_{i-1}$ ,  $M_i$ ,  $M_{i+1}$ . Nếu chú ý đến (5.63) và (5.64) ta có thể đưa hai phương trình trên về dạng chỉ chứa hai ẩn  $M_{i-1}$  và  $M_i$  như sau:

$$-\frac{\lambda_{i-1}}{k_{i-1}} M_{i-1} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i)M_{i-1} + \lambda_i M_i + 6EI_o \Delta_{(i-1)P} = 0;$$

$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})M_i - \frac{\lambda_{i+1}}{k'_{i+1}} M_{i+1} + 6EI_o \Delta_{iP} = 0.$$

Chú ý đến các công thức (5.65) và (5.66), sau khi biến đổi ta có:

$$M_{i-1} k_i + M_i + \frac{6EI_o}{\lambda_i} \Delta_{(i-1)P} = 0; \quad M_{i-1} + M_i k'_i + \frac{6EI_o}{\lambda_i} \Delta_{iP} = 0.$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} M_{i-1} &= -\frac{6EI_o}{\lambda_i} \cdot \frac{\Delta_{(i-1)P} k'_i - \Delta_{iP}}{k_i k'_i - 1}; \\ M_i &= -\frac{6EI_o}{\lambda_i} \cdot \frac{\Delta_{iP} k_i - \Delta_{(i-1)P}}{k_i k'_i - 1}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Trong trường hợp dầm chỉ chịu tải trọng tác dụng, theo (5.56) với chú ý là tải trọng chỉ đặt ở nhịp  $i$ , ta có:

$$\Delta_{(i-1)P} = \frac{\omega_i b_i}{l_i EI_i}; \quad \Delta_{iP} = \frac{\omega_i a_i}{l_i EI_i}.$$

Do đó:

$$\boxed{M_{i-1} = -\frac{6I_o \omega_i}{\lambda_i l_i I_i} \cdot \frac{(b_i k'_i - a_i)}{k_i k'_i - 1}; \quad M_i = -\frac{6I_o \omega_i}{\lambda_i l_i I_i} \cdot \frac{(a_i k_i - b_i)}{k_i k'_i - 1}} \quad (5.68)$$

Công thức này cho phép ta tìm được mômen tựa ở hai đầu nhịp có tải trọng. Khi sử dụng công thức (5.68) có thể xảy ra hai trường hợp đặc biệt sau:

- 1) Nếu dầm liên tục có gối tựa đầu tiên là khớp và tải trọng tác dụng ngay trong nhịp thứ nhất thì ta biết ngay mômen tựa ở khớp đầu tiên  $M_o = 0$ , còn mômen tựa  $M_1$  tính theo công thức (5.68) sẽ có dạng vô định bởi vì tỷ số tiêu cự trái  $k_l = \infty$ . Muốn khử dạng vô định đó để tìm  $M_1$ , ta viết:

$$M_1 = -\frac{6I_o\omega_1}{\lambda_1 l_1 I_1} \frac{(a_1 k_1 - b_1)}{k_1 k'_1 - 1} = -\frac{6I_o\omega_1}{\lambda_1 l_1 I_1} \left[ \frac{a_1 k_1 / k_1 - b_1 / k_1}{k_1 k'_1 / k_1 - 1 / k_1} \right] =$$

$$= -\frac{6I_o\omega_1}{\lambda_1 l_1 I_1} \left[ \frac{a_1 - b_1 / \infty}{k'_1 - 1 / \infty} \right] = -\frac{6I_o\omega_1 a_1}{\lambda_1 l_1 k'_1 I_1}$$

Như vậy nếu dầm liên tục có gối tựa đầu tiên là khớp và tải trọng tác dụng ngay trong nhịp thứ nhất của dầm thì ta có các công thức sau:

$$M_0 = 0; \quad M_1 = -\frac{6I_o\omega_1 a_1}{\lambda_1 l_1 k'_1 I_1} \quad (5.69)$$

2) Cũng chứng minh tương tự, nếu dầm liên tục có gối tựa cuối cùng là khớp và tải trọng tác dụng ở nhịp cuối thứ  $(n+1)$  của dầm thì ta có các công thức:

$$M_n = -\frac{6I_o\omega_{n+1} b_{n+1}}{\lambda_{n+1} l_{n+1} k_{n+1} I_{n+1}}; \quad M_{n+1} = 0 \quad (5.70)$$

**Ví dụ 5.24.** Vận dụng phương pháp tiêu cự mômen để vẽ biểu đồ mômen uốn cho dầm trên hình 5.70a.

Dầm liên tục trên hình 5.70a chịu tải trọng tác dụng trên ba nhịp. Khi áp dụng phương pháp tiêu cự mômen ta cần chia bài toán đã cho thành ba bài toán riêng rẽ, trong mỗi bài tải trọng chỉ tác dụng ở một nhịp rồi cộng các kết quả theo nguyên lý cộng tác dụng.

Ta lần lượt giải bài toán theo thứ tự như sau:

1) Xác định các nhịp quy ước. Chọn  $l_o = 2l$  ta có:

$$\lambda_1 = l_1 l_o / l = 8.2l / l = 16 \text{ m}; \quad \lambda_2 = 4.l = 4 \text{ m}; \quad \lambda_3 = 6 \text{ m};$$

2) Xác định các tỷ số tiêu cự theo (5.65) và (5.66)

Tỷ số tiêu cự trái:  $k_1 = \infty$ ;

$$k_2 = 2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left( 2 - \frac{l}{k_1} \right) = 2 + \frac{16}{4} \left( 2 - \frac{l}{\infty} \right) = 10;$$

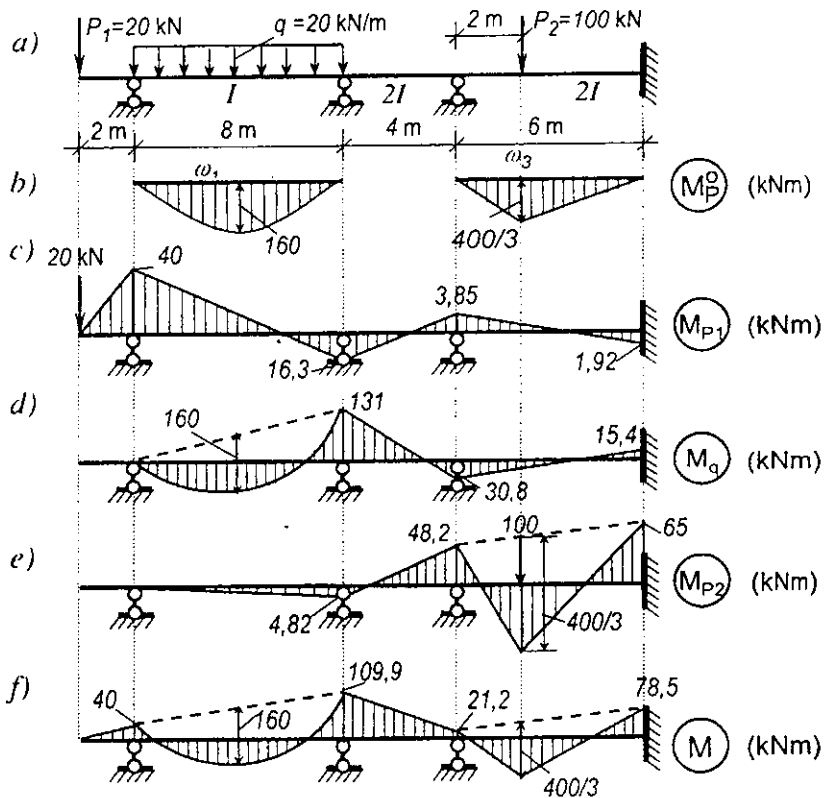
$$k_3 = 2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \left( 2 - \frac{l}{k_2} \right) = 2 + \frac{4}{6} \left( 2 - \frac{l}{10} \right) = 3,268.$$

Tỷ số tiêu cự phải:  $k'_3 = 2$ ;

$$k'_2 = 2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \left( 2 - \frac{l}{k'_3} \right) = 2 + \frac{6}{4} \left( 2 - \frac{l}{2} \right) = 4,25;$$



$$k'_1 = 2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left( 2 - \frac{I}{k'_2} \right) = 2 + \frac{4}{16} \left( 2 - \frac{I}{4,25} \right) = 2,442.$$



Hình 5.70

3) Vẽ các biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong các nhịp được xem như các dầm đơn giản. Kết quả như trên hình 5.70b.

4) Xác định mômen tựa ở hai bên nhịp có tải trọng và vẽ biểu đồ mômen uốn cho từng trường hợp tải trọng

✦ Trường hợp dầm chỉ chịu lực tập trung  $P_1 = 20$  kN đặt ở đầu thừa.

Lúc này tất cả các mômen tựa khác được xác định từ mômen gối tựa  $M_o = -20.2 = -40$  kNm theo các tỷ số tiêu cự phải:

$$M_o = -40 \text{ kNm};$$

$$M_1 = -M_o / k'_1 = -(-40) / 2,442 = 16,3 \text{ kNm};$$

$$M_2 = -M_1 / k'_2 = -16,3 / 4,25 = -3,85 \text{ kNm};$$

$$M_3 = -M_2 / k'_3 = -(-3,85) / 2 = 1,92 \text{ kNm}.$$

Từ các giá trị mômen tựa này ta vẽ được biểu đồ mômen uốn do lực  $P_1$  gây ra như trên hình 5.70c.

- ✦ Trường hợp dầm chịu tải trọng phân bố đều  $q = 20$  kN/m đặt trên nhịp  $l$ .

Sử dụng các công thức (5.69) ta có:

$$M_0 = 0; \quad M_1 = -\frac{6I_o\omega_1 a_1}{\lambda_1 l_1 k'_1 I_1},$$

trong đó:  $I_o = 2I$ ;  $I_1 = I$ ;  $\lambda_1 = 16$  m;  $l_1 = 8$  m;  $a_1 = b_1 = 4$  m;

$$k'_1 = 2,442; \quad \omega_1 = ql^3/12 = 20 \cdot 8^3/12 = 2560/3 \text{ kNm}^2.$$

Do đó: 
$$M_1 = -\frac{6 \cdot 21}{16 \cdot 81} \cdot \frac{2560}{3} \cdot \frac{4}{2,442} = -131 \text{ kNm}.$$

Sau khi đã xác định được các mômen tựa ở hai bên nhịp có tải trọng ta tìm các mômen tựa khác theo tỷ số tiêu cự đã biết:

$$M_2 = -M_1/k'_2 = 131/4,25 = 30,8 \text{ kNm};$$

$$M_3 = -M_2/k'_3 = -30,8/2 = -15,4 \text{ kNm}.$$

Từ các giá trị mômen tựa này ta vẽ được biểu đồ mômen uốn do riêng tải trọng  $q = 20$  kN/m đặt trong nhịp  $l$  gây ra như trên hình 5.70d.

- ✦ Trường hợp dầm chịu tải trọng  $P_2 = 100$  kNm đặt trên nhịp 3.

Sử dụng các công thức (5.68) ta tìm được mômen tựa ở hai bên nhịp có tải trọng:

$$M_2 = -\frac{6 \cdot 21 \cdot 400}{6 \cdot 6 \cdot 21} \times \frac{3,33 \cdot 2 - 2,67}{3,268 \cdot 2 - 1} = -48,2 \text{ kNm};$$

$$M_3 = -\frac{6 \cdot 21 \cdot 400}{6 \cdot 6 \cdot 21} \times \frac{2,67 \cdot 3,268 - 3,33}{3,268 \cdot 2 - 1} = -65,0 \text{ kNm}.$$

Sau khi tìm được các mômen tựa ở hai bên nhịp có tải trọng ta tìm các mômen tựa còn lại theo các tỷ số tiêu cự đã biết:

$$M_1 = -M_2/k_2 = 48,2/10 = 4,82 \text{ kNm};$$

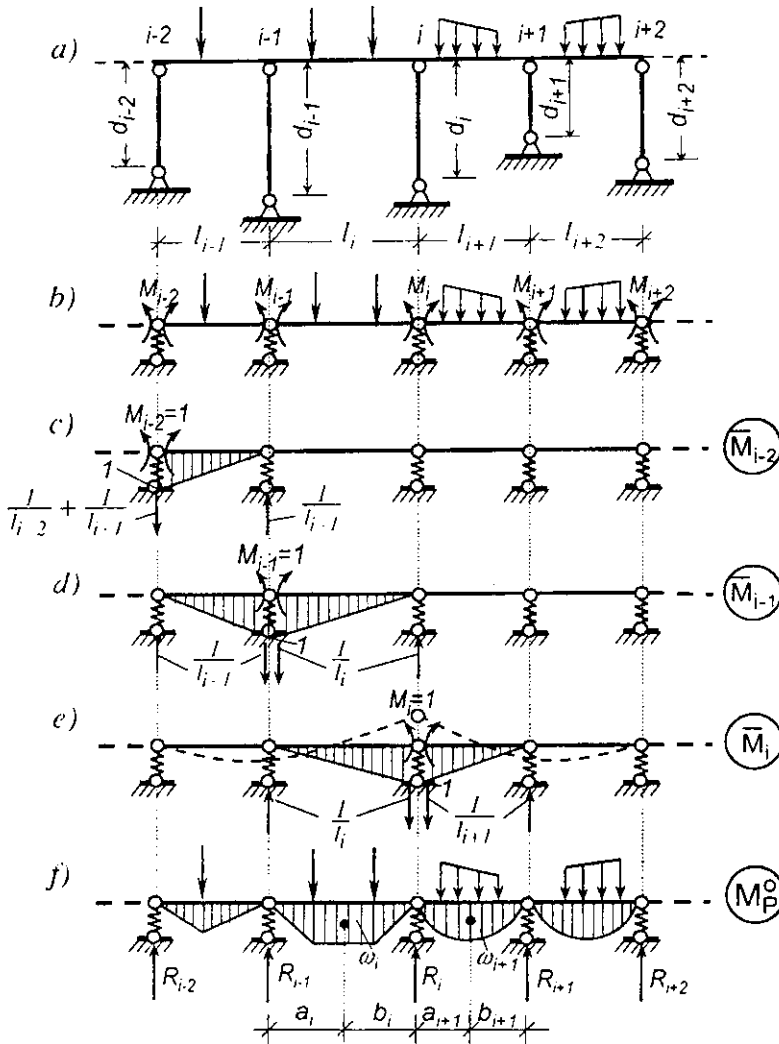
$$M_0 = -M_1/k_1 = -4,82/\infty = 0 \text{ kNm}.$$

Từ các trị số mômen tựa tìm được ta vẽ biểu đồ mômen uốn do riêng tải trọng  $P_2 = 100$  kN gây ra (hình 5.70e).

Biểu đồ mômen uốn tổng cộng là tổng của ba biểu đồ mômen uốn vẽ trên các hình 5.70c, d, e tìm được như trên hình 5.70f.

### 5.10. Cách tính dầm liên tục đặt trên các gối đàn hồi

Trong thực tế ta có thể gặp các dầm liên tục đặt trên các cột có chiều dài hữu hạn, đặt trên các hệ dàn hồi khác hoặc đặt trên các gối phao v.v... Dưới tác dụng của tải trọng, các gối này có thể chuyển vị đàn hồi theo phương vuông góc với trục dầm. Ta gọi những dầm này là *dầm liên tục đặt trên các gối đàn hồi*.



Hình 5.71

Giả sử hệ chỉ chịu tải trọng (với các nguyên nhân khác, cách giải quyết cũng tương tự). Sơ đồ tính của dầm như trên hình 5.71a. Ta có thể mô tả các gối đàn hồi bằng các liên kết lò xo, đặc trưng bằng hệ số đàn hồi  $c_j$ .

Như đã biết, về ý nghĩa, hệ số đàn hồi  $c_j$  của gối thứ  $j$  là lực cần tác dụng vào gối thứ  $j$  để sao cho gối có chuyển vị bằng đơn vị. Ví dụ, hệ số đàn hồi của cột thứ  $j$  có tiết diện  $A_j$ , chiều cao  $d_j$  sẽ bằng:

$$c_j = \frac{(EA)_j}{d_j}. \quad (5.71)$$

Như vậy, nếu phản lực tại gối tựa thứ  $i$  là  $R_j$  thì giữa  $R_j$  và chuyển vị  $y_j$  của gối có sự liên hệ:

$$R_j = c_j y_j. \quad (5.72)$$

Để tính dầm ta vận dụng phương pháp lực, chọn hệ cơ bản như trên hình 5.71b, ẩn là mômen uốn tại tiết diện trên các gối tựa trung gian. Với hệ cơ bản đã chọn ta nhận thấy mômen  $M_i$  chỉ gây ra chuyển vị trong phạm vi các nhịp  $(i-1)$ ,  $i$ ,  $(i+1)$  và  $(i+2)$  như đường đứt nét trên hình 5.71e. Như vậy mômen  $M_i$  chỉ gây ra chuyển vị tương ứng với các ẩn  $M_{i-2}$ ,  $M_{i-1}$ ,  $M_i$ ,  $M_{i+1}$  và  $M_{i+2}$  nghĩa là chỉ tồn tại các hệ số  $\delta_{(i-2)i} = \delta_{(i-2)}$ ;  $\delta_{(i-1)i} = \delta_{(i-1)}$ ;  $\delta_{ii}$ ;  $\delta_{(i+1)i} = \delta_{(i+1)}$ ;  $\delta_{(i+2)i} = \delta_{(i+2)}$ , còn các hệ số phụ khác đều bằng không. Phương trình chính tắc viết cho gối tựa trung gian thứ  $i$  có dạng:

$$\delta_{(i-2)i} M_{(i-2)} + \delta_{(i-1)i} M_{(i-1)} + \delta_{ii} M_i + \delta_{(i+1)i} M_{(i+1)} + \delta_{(i+2)i} M_{(i+2)} + \Delta_{iP} = 0. \quad (5.73)$$

Phương trình này chứa năm mômen tựa chưa biết tại năm gối kế tiếp nhau nên gọi là phương trình năm mômen.

Ứng với mỗi gối tựa trung gian của dầm ta lập được một phương trình năm mômen. Do đó, với dầm có  $n$  gối tựa trung gian ta sẽ lập được hệ  $n$  phương trình năm mômen đủ để xác định  $n$  ẩn số mômen tựa.

Bây giờ ta xác định các hệ số và số hạng tự do của phương trình năm mômen. Khi tìm các hệ số này, ngoài ảnh hưởng của biến dạng uốn ta còn phải chú ý đến ảnh hưởng của biến dạng dọc trục trong các gối tựa đàn hồi (bỏ qua biến dạng trượt). Theo công thức xác định chuyển vị (5.4) ta có:

$$\delta_{ik} = (\bar{M}_i)(\bar{M}_k) + \sum_j \bar{R}_{ji} \bar{R}_{jk} \frac{1}{c_j},$$

trong đó:

$(\bar{M}_i)$ ,  $(\bar{M}_k)$  – các biểu đồ mômen uốn do  $M_i = 1$  và  $M_k = 1$  gây ra trong hệ cơ bản;

$\bar{R}_{ji}$ ,  $\bar{R}_{jk}$  – phản lực hay lực dọc trong gối thứ  $j$  do  $M_i = 1$  và  $M_k = 1$  gây ra trong hệ cơ bản.

Dấu tổng được thực hiện cho tất cả các gối đàn hồi.

Để làm ví dụ, ta xác định các hệ số  $\delta_{i(i-2)}$ ;  $\delta_{i(i-1)}$  và  $\delta_{ii}$ . Các biểu đồ mômen uốn đơn vị và phản lực trong các gối đàn hồi do các  $M_{i-2}=1$ ;  $M_{i-1}=1$  và  $M_i=1$  gây ra trong hệ cơ bản được xác định như trên hình 5.71c, d, e. Ta có:

$$\delta_{i(i-2)} = 0 + \left(-\frac{1}{l_i}\right) \left(-\frac{1}{l_{i-1}}\right) \frac{1}{c_{i-1}} = \frac{1}{c_{i-1} l_i l_{i-1}};$$

$$\delta_{i(i-1)} = \frac{l_i}{6EI_i} - \frac{1}{c_{i-1} l_i} \left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i}\right) - \frac{1}{c_i l_i} \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right);$$

$$\delta_{ii} = \frac{l_i}{3EI_i} + \frac{l_{i+1}}{3EI_{i+1}} + \frac{1}{c_{i-1} l_i^2} + \frac{1}{c_i} \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)^2 + \frac{1}{c_{i+1} l_{i+1}^2}.$$

Các hệ số  $\delta_{i(i+1)}$  và  $\delta_{i(i+2)}$  được xác định tương tự.

Số hạng tự do được xác định theo công thức (5.9) như sau:

$$\Delta_{iP} = (\bar{M}_i)(M_P^o) + \sum_j \bar{R}_{ji} R_{jP}^o \frac{1}{c_j},$$

trong đó:

$(M_P^o)$  – biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản (hình 5.71f);

$R_{jP}^o$  – phản lực tại gối tựa thứ  $j$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

Nếu ký hiệu các phản lực này là  $R_j$  (hình 5.71f) thì sau khi thực hiện các phép tính, ta được:

$$\Delta_{iP} = \frac{\omega_j a_i}{l_i EI_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} EI_{i+1}} + \frac{R_{i-1}}{c_{i-1} l_i} - \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right) \frac{R_i}{c_i} + \frac{R_{i+1}}{c_{i+1} l_{i+1}}.$$

Các đại lượng  $\omega$ ,  $a$ ,  $b$  vẫn có ý nghĩa tương tự như đã trình bày trong mục 5.9.

Sau khi thay các hệ số và số hạng tự do vào phương trình (5.73) ta sẽ được phương trình năm mômen dưới dạng khai triển.

Trong trường hợp đặc biệt khi dầm có độ cứng  $EI = \text{const}$ , chiều dài của các nhịp đều nhau và các gối đàn hồi có hệ số đàn hồi  $c$  như nhau, phương trình năm mômen có dạng đơn giản như sau:

$$\alpha M_{i-2} + (1-4\alpha) M_{i-1} + (4+6\alpha) M_i + (1-4\alpha) M_{i+1} + \alpha M_{i+2} + \frac{6}{l^2} (\omega_i a_i + \omega_{i+1} b_{i+1}) + \alpha l (R_{i-1} - 2R_i + R_{i+1}) = 0. \quad (5.74)$$

trong đó  $\alpha$  là đại lượng không thứ nguyên:

$$\alpha = \frac{6EI}{cl^3}.$$

Sau khi giải hệ phương trình năm mômen để xác định các mômen tựa  $M_i$  ta vẽ được các biểu đồ mômen uốn, biểu đồ lực cắt và xác định phản lực trong các gối tựa theo cách thức đã trình bày trong mục 5.9.

## 5.11. Cách tính hệ siêu tĩnh chịu tải trọng di động

Như đã biết từ chương 3, nhiệm vụ của bài toán tính hệ chịu tải trọng di động bao gồm: xác định vị trí bất lợi của đoàn tải trọng trên công trình và xác định giá trị để tính của đại lượng nghiên cứu  $S$ . Để thực hiện nhiệm vụ này ta đã xây dựng khái niệm về đường ảnh hưởng, tiếp đó vận dụng đường ảnh hưởng để xác định vị trí bất lợi của đoàn tải trọng và xác định giá trị để tính của đại lượng nghiên cứu  $S$  như đã trình bày trong 3.8; 3.9; 3.10. Lý thuyết trình bày trong các mục đó là tổng quát, áp dụng cho các đ.a.h. trong hệ tĩnh định cũng như trong hệ siêu tĩnh nên ở đây chỉ cần trình bày về cách vẽ đ.a.h. trong hệ siêu tĩnh mà không cần bàn thêm về cách vận dụng đ.a.h. để thực hiện hai nhiệm vụ nói trên.

Nguyên tắc tính hệ siêu tĩnh chịu tải trọng di động cũng tương tự như nguyên tắc tính hệ siêu tĩnh chịu tải trọng bất động. Như đã biết, muốn xác định một đại lượng nào đó trong hệ siêu tĩnh thì trước tiên phải tìm các ẩn  $X_k$ . Do đó, muốn vẽ đ.a.h. của một đại lượng bất kỳ trong hệ siêu tĩnh thì trước tiên ta cũng phải vẽ được đ.a.h. của các ẩn  $X_k$ . Những đ.a.h.  $X_k$  gọi là "đường ảnh hưởng cơ bản". Sau đó vẽ các đ.a.h. của những đại lượng khác theo các đ.a.h. cơ bản.

### A. Đường ảnh hưởng cơ bản

Đường ảnh hưởng cơ bản  $X_k$  được xác định từ hệ phương trình chính tắc (5.3) nhưng khi vẽ đ.a.h. ta chỉ cho một lực  $P = 1$  duy nhất di động trên hệ nên số hạng tự do  $\Delta_{kP}$  biểu thị chuyển vị theo phương  $X_k$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản trở thành  $\delta_{kP}$  vì nguyên nhân gây ra chuyển vị này bằng đơn vị.



trong đó:

$\beta_{ik}$  – hệ số ảnh hưởng, xác định theo công thức sau:

$$\beta_{ik} = (-1)^{(i+k\pm 1)} \frac{D_{ik}}{D}, \quad (5.77)$$

số mũ trong biểu thức có thể lấy dấu cộng hoặc trừ;

$D$  – định thức các hệ số trong hệ phương trình (5.75):

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1i} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2i} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \dots & \delta_{ki} & \dots & \delta_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{ni} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix};$$

$D_{ik}$  – định thức suy ra từ định thức  $D$  bằng cách loại bỏ hàng thứ  $i$  cột thứ  $k$  (hoặc hàng thứ  $k$  cột thứ  $i$ ).

### B. Đường ảnh hưởng phản lực, nội lực và chuyển vị

Sau khi tìm được các đ.a.h. cơ bản, áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể vẽ đ.a.h. của đại lượng  $S$  (phản lực, nội lực hay chuyển vị) theo biểu thức sau:

$$\text{Đ.a.h.} S = \bar{S}_1 (\text{đ.a.h.} X_1) + \bar{S}_2 (\text{đ.a.h.} X_2) + \dots + \bar{S}_n (\text{đ.a.h.} X_n) + \text{đ.a.h.} S^o, \quad (5.78)$$

trong đó:

$\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_n$  – giá trị của đại lượng cần vẽ đ.a.h. do riêng từng lực  $X_1,$

$X_2, \dots, X_n$  bằng đơn vị gây ra trong hệ cơ bản, những đại lượng này có giá trị xác định;

$\text{đ.a.h.} X_1, \text{đ.a.h.} X_2, \dots, \text{đ.a.h.} X_n$  – các đường ảnh hưởng cơ bản;

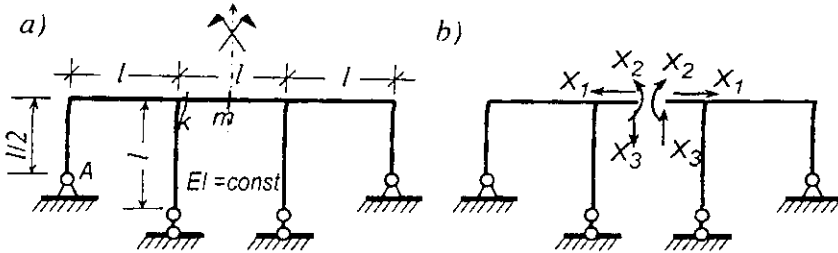
$\text{đ.a.h.} S^o$  – đường ảnh hưởng của đại lượng  $S$  trong hệ cơ bản.

Khi vẽ đường ảnh hưởng trong hệ siêu tĩnh, nên thiết lập bảng tính (xem ví dụ).

**Ví dụ 5.25.** Cho khung siêu tĩnh như trên hình 5.72a. Yêu cầu:

- Vẽ các đường ảnh hưởng cơ bản.
- Vẽ đường ảnh hưởng mômen uốn và lực cắt tại tiết diện  $m$  ở chính giữa hệ và tại tiết diện  $k$ .
- Vẽ đường ảnh hưởng của thành phần phản lực thẳng đứng tại gối A.





Hình 5.72

1) Vẽ các đường ảnh hưởng cơ bản

Hệ có bậc siêu tĩnh bằng ba. Chọn hệ cơ bản như trên hình 5.72b.

Hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \delta_{1P} = 0 ;$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \delta_{2P} = 0 ;$$

$$\delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \delta_{3P} = 0 .$$

Vì hệ cơ bản chọn đối xứng nên các biểu đồ  $(\bar{M}_1)$ ,  $(\bar{M}_2)$  có tính chất đối xứng còn biểu đồ  $(\bar{M}_3)$  có tính chất phản xứng. Như đã biết, kết quả nhân biểu đồ đối xứng với biểu đồ phản xứng bằng không. Do đó, trong trường hợp này ta có  $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$  và  $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$ .

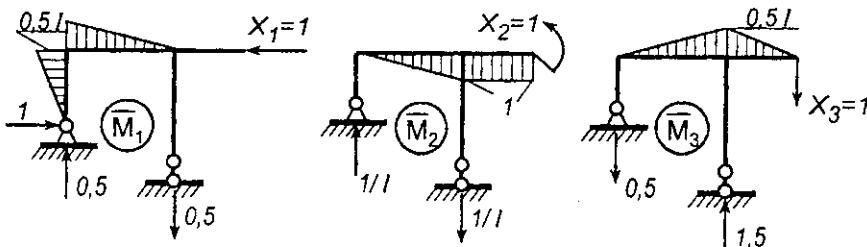
Hệ phương trình chính tắc phân thành hai nhóm độc lập:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{1P} = 0 ;$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{2P} = 0 ;$$

$$\delta_{33} X_3 + \delta_{3P} = 0 .$$

Để xác định các hệ số  $\delta_{km}$  ta chỉ cần thực hiện tính toán với nửa hệ rồi nhân đôi kết quả. Các biểu đồ đơn vị như trên hình 5.73.



Hình 5.73

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \frac{2}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} \right] = \frac{l^3}{4EI};$$

$$\delta_{22} = (\bar{M}_2)(\bar{M}_2) = \frac{2}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \right] = \frac{5l}{3EI};$$

$$\delta_{33} = (\bar{M}_3)(\bar{M}_3) = \frac{2}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{l^3}{4EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_2) = -\frac{2}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot l \right] = -\frac{l^2}{6EI}.$$

Thay các kết quả vào hệ phương trình chính tắc, sau khi biến đổi ta được:

$$\begin{aligned} \frac{l^3}{4} X_1 - \frac{l^2}{6} X_2 + EI \delta_{1P} &= 0; \\ -\frac{l^2}{6} X_1 + \frac{5l}{3} X_2 + EI \delta_{2P} &= 0; \\ \frac{l^3}{4} X_3 + EI \delta_{3P} &= 0. \end{aligned}$$

Từ phương trình thứ ba ta có  $X_3 = -\frac{4EI}{l^3} \delta_{3P}$ . (a)

Để giải hai phương trình đầu, ta sử dụng phương pháp hệ số ảnh hưởng:

$$X_1 = EI (\beta_{11} \delta_{1P} + \beta_{12} \delta_{2P});$$

$$X_2 = EI (\beta_{21} \delta_{1P} + \beta_{22} \delta_{2P}).$$

Định thức các hệ số:

$$D = \begin{vmatrix} l^3/4 & -l^2/6 \\ -l^2/6 & 5l/3 \end{vmatrix} = \frac{7l^4}{18}.$$

$$\beta_{11} = (-1)^{(1+1+1)} \frac{5l}{3} \cdot \frac{18}{7l^4} = -\frac{30}{7l^3};$$

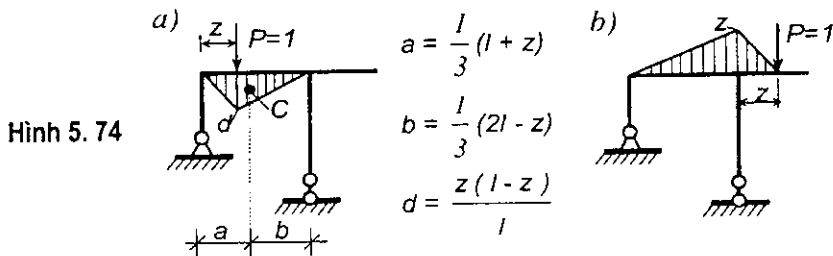
$$\beta_{22} = (-1)^{(2+2+1)} \frac{l^3}{4} \cdot \frac{18}{7l^4} = -\frac{9}{14l};$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = (-1)^{(1+2+1)} \left( -\frac{l^2}{6} \right) \cdot \frac{18}{7l^4} = -\frac{3}{7l^2}.$$

Vậy 
$$X_1 = -\frac{3EI}{7l^3} (10 \delta_{1P} + l \delta_{2P}); \quad (b)$$

$$X_2 = -\frac{3EI}{14l^2} (2 \delta_{1P} + 3l \delta_{2P}). \quad (c)$$

Để xác định  $\delta_{kP}$  ta lần lượt cho  $P=1$  di động trong từng nhịp.



✦ Khi  $P=1$  di động trên nhịp bên trái,  $(M_P^o)$  có dạng như trên hình 5.74a.

$$\delta_{1P} = (\bar{M}_1)(M_P^o) = -\frac{l}{EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{z(l-z)}{l} \cdot \frac{2l-z}{3l} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{l}{12EI} z(l-z)(2l-z);$$

$$\delta_{2P} = (\bar{M}_2)(M_P^o) = \frac{l}{EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{z(l-z)}{l} \cdot \frac{l+z}{3l} \cdot l = \frac{l}{6EI} z(l^2 - z^2);$$

$$\delta_{3P} = (\bar{M}_3)(M_P^o) = -\frac{l}{EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{z(l-z)}{l} \cdot \frac{l+z}{3l} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{l}{12EI} z(l^2 - z^2).$$

Nếu ký hiệu  $u = z/l$  thì

$$\delta_{1P} = -\frac{l^3}{12EI} u(1-u)(2-u) = -\frac{l^3}{12EI} f_1(u);$$

$$\delta_{2P} = \frac{l^2}{6EI} u(1-u^2) = \frac{l^2}{6EI} f_2(u);$$

$$\delta_{3P} = -\frac{l^3}{12EI} u(1-u^2) = -\frac{l^3}{12EI} f_2(u),$$

với  $f_1(u) = u(1-u)(2-u); \quad f_2(u) = u(1-u^2).$

Thay những số liệu này vào (a), (b) và (c) ta sẽ tìm được phương trình các đường ảnh hưởng cơ bản trong nhịp bên trái:

$$X_1 = -\frac{3EI}{7l^3} \left[ -\frac{10l^3}{12EI} f_1(u) + \frac{l^3}{6EI} f_2(u) \right] = \frac{l}{14} [5f_1(u) - f_2(u)]; \quad (d)$$

$$X_2 = -\frac{3EI}{l^2} \left[ -\frac{2l^3}{12EI} f_1(u) + \frac{3l^3}{6EI} f_2(u) \right] = \frac{l}{28} [f_1(u) - 3f_2(u)]; \quad (e)$$

$$X_3 = \frac{4EI}{l^3} \cdot \frac{l^3}{12EI} f_2(u) = \frac{1}{3} f_2(u). \quad (f)$$

Cho  $u$  biến thiên ta vẽ được các đường ảnh hưởng cơ bản trong nhịp trái.

Trong thực hành thường nên chia nhịp thành những đoạn có khoảng cách đều nhau. Với mỗi điểm chia (ranh giới giữa các đoạn chia) ta xác định được một giá trị  $u$ ; tiếp đó xác định được một tung độ đ.a.h. tương ứng. Nối các tung độ này với nhau bằng các đoạn thẳng hoặc đường cong gần đúng ta sẽ được đ.a.h. cần tìm. Tất nhiên càng tính nhiều tung độ đ.a.h. tại nhiều điểm chia khác nhau thì kết quả càng chính xác. Trong ví dụ này ta chọn các điểm chia như trên hình 5.75a. Kết quả tính tung độ các đ.a.h. tương ứng tại các điểm chia ghi trong bảng 5.3.

**Bảng 5.3**

Điểm	$u$	$f_1(u)$	$f_2(u)$	Đ.a.h. $X_1$ , (theo d)	Đ.a.h. $X_2$ , (theo e)	Đ.a.h. $X_3$ , (theo f)
0	0,00	0,0000	0,0000	0,000	0,000	0,000
1	0,25	0,3281	0,2344	0,100	-0,0131	0,078
2	0,50	0,3750	0,3750	0,107	-0,0271	0,125
3	0,75	0,2344	0,3281	0,060	-0,0271	0,109
4	1,00	0,0000	0,0000	0,000	0,000	0,000

Dựa vào những số liệu này ta sẽ vẽ được các đ.a.h. cơ bản trong nhịp trái (hình 5.75b, c, d).

✦ Khi  $P=1$  di động trên phần phải của nhịp giữa, ( $M_P^o$ ) có dạng như trên hình 5.74b.

$$\delta_{1P} = (\bar{M}_1)(M_P^o) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot z \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{l^2}{12EI} z = \frac{l^3}{12EI} u;$$

$$\begin{aligned} \delta_{2P} &= (\bar{M}_2)(M_P^o) = -\frac{1}{EI} \left[ \frac{zl}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{z \cdot z}{2} \cdot 1 \right] = -\frac{1}{6EI} z(2l + 3z) = \\ &= -\frac{l^3}{6EI} u(2 + 3u) = -\frac{l^3}{6EI} f_3(u); \end{aligned}$$

$$\delta_{3P} = (\bar{M}_3)(M_P^o) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{zl}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{z \cdot z}{2} \cdot \frac{(l/2 - z/3)}{l/2} \right] =$$

$$= \frac{l}{6EI} z \left[ l^2 + \frac{3}{2}zl - z^2 \right] = \frac{l^3}{12EI} u(2 + 3u - 2u^2) = \frac{l^3}{12EI} f_4(u),$$

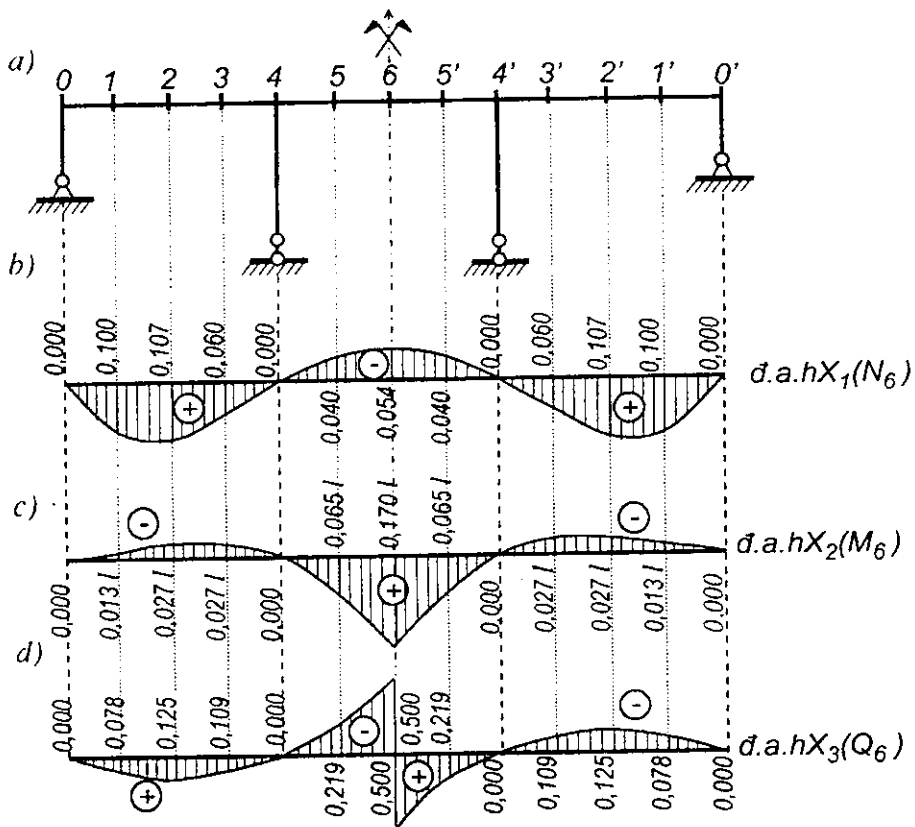
trong đó:  $f_3(u) = u(2+3u)$ ;  $f_4(u) = u(2+3u-2u^2)$ .

Thay các số liệu vào (a), (b), và (c) ta được:

$$X_1 = -\frac{3EI}{7l^3} \left[ \frac{10l^3}{12EI} u - \frac{l^3}{6EI} f_3(u) \right] = \frac{l}{14} [f_3(u) - 5u]; \quad (g)$$

$$X_2 = -\frac{3EI}{14l^2} \left[ \frac{2l^3}{12EI} u - \frac{3l^3}{6EI} f_3(u) \right] = \frac{l}{28} [3f_3(u) - u]; \quad (h)$$

$$X_3 = -\frac{4EI}{l^3} \cdot \frac{l^3}{12EI} f_4(u) = -\frac{1}{3} f_4(u). \quad (i)$$



Hình 5. 75

Kết quả tính các tung độ của d.a.h. cơ bản trên nửa phần bên trái của nhịp giữa ghi trong bảng 5.4.

**Bảng 5.4**

Điểm	$u$	$f_3(u)$	$f_4(u)$	Đ.a.h. $X_1$ , (theo $g$ )	Đ.a.h. $X_2$ , (theo $h$ )	Đ.a.h. $X_3$ , (theo $i$ )
4	0,00	0,0000	0,0000	0,000	0,000	0,000
5	0,25	0,6875	0,6563	-0,040	0,0651	-0,219
6	0,50	1,7500	1,5000	-0,054	0,1701	-0,500

Dựa vào những số liệu này ta sẽ vẽ được các đường ảnh hưởng cơ bản trên nửa phần bên trái của nhịp giữa.

Vì khung đối xứng và các cặp ẩn có tính đối xứng hoặc phản xứng nên ta không cần cho  $P=1$  di động trên nửa phần bên phải của khung để tính toán mà suy ra như sau: các tung độ của d.a.h.  $X_1$ , d.a.h.  $X_2$  tại những điểm thuộc phần bên phải khung và các tung độ tại những điểm đối xứng thuộc phần bên trái khung có giá trị và dấu như nhau, còn đối với d.a.h.  $X_3$  thì hai tung độ này có giá trị bằng nhau nhưng trái dấu (hình 5.75b, c, d).

## 2) Vẽ đường ảnh hưởng nội lực và phản lực

Đường ảnh hưởng mômen uốn và lực cắt tại tiết diện  $m$  ở giữa khung chính là d.a.h.  $X_2$  và d.a.h.  $X_3$ .

Để vẽ các d.a.h.  $M_k$ ,  $Q_k$ ,  $R_A$ , ta áp dụng công thức (5.78):

$$\text{Đ.a.h. } M_k = \bar{M}_{k1}(d.a.h.X_1) + \bar{M}_{k2}(d.a.h.X_2) + \bar{M}_{k3}(d.a.h.X_3) + d.a.h. M_k^o;$$

$$\text{Đ.a.h. } Q_k = \bar{Q}_{k1}(d.a.h.X_1) + \bar{Q}_{k2}(d.a.h.X_2) + \bar{Q}_{k3}(d.a.h.X_3) + d.a.h. Q_k^o;$$

$$\text{Đ.a.h. } R_A = \bar{R}_{A1}(d.a.h.X_1) + \bar{R}_{A2}(d.a.h.X_2) + \bar{R}_{A3}(d.a.h.X_3) + d.a.h. R_A^o.$$

Từ hình 5.73 ta dễ dàng xác định được:

$$\bar{M}_{k1} = 0; \quad \bar{M}_{k2} = 1; \quad \bar{M}_{k3} = -1/2;$$

$$\bar{Q}_{k1} = 0; \quad \bar{Q}_{k2} = 0; \quad \bar{Q}_{k3} = 1;$$

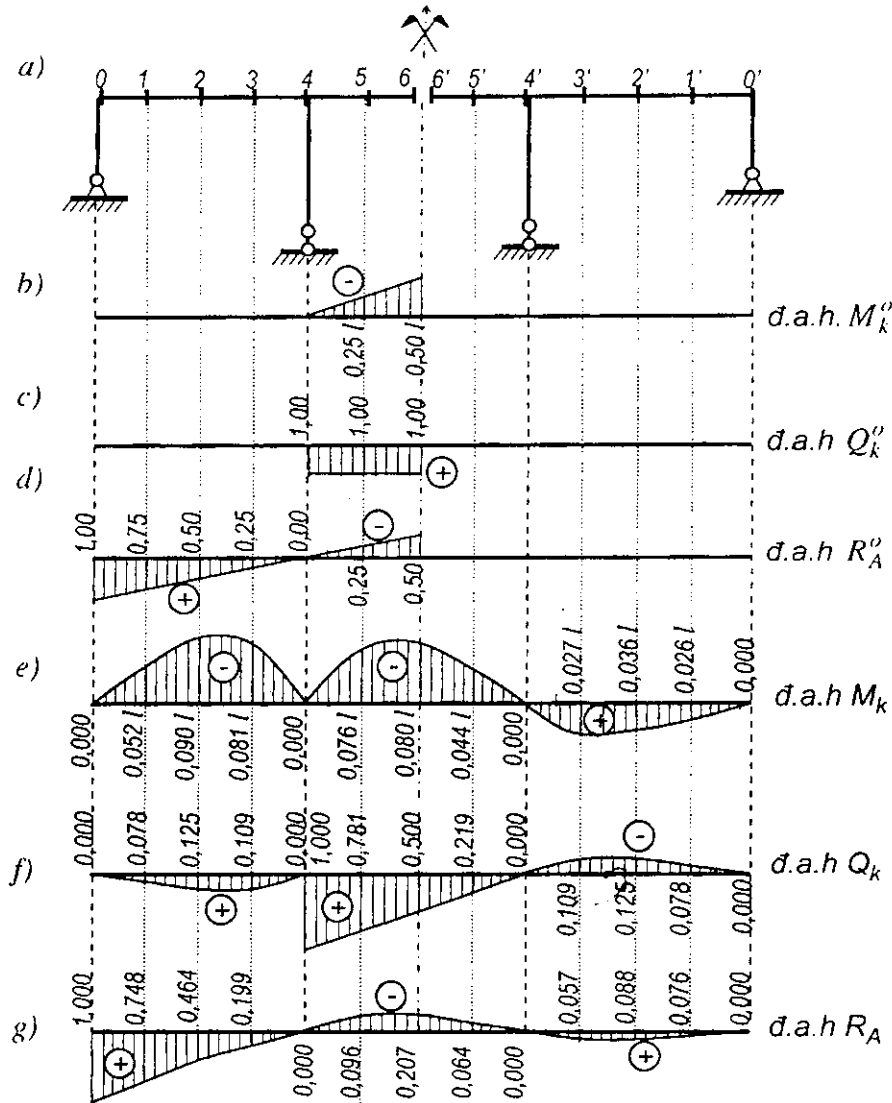
$$\bar{R}_{A1} = 1/2; \quad \bar{R}_{A2} = 1/1; \quad \bar{R}_{A3} = -1/2.$$

$$\text{Vậy: } \text{Đ.a.h. } M_k = (d.a.h.X_2) - \frac{1}{2}(d.a.h.X_3) + d.a.h. M_k^o;$$

$$\text{Đ.a.h. } Q_k = (d.a.h.X_3) + d.a.h. Q_k^o;$$

$$\text{Đ.a.h. } R_A = \frac{1}{2}(d.a.h.X_1) + \frac{1}{1}(d.a.h.X_2) - \frac{1}{2}(d.a.h.X_3) + d.a.h. R_A^o.$$

Các  $d.a.h. M_k^o$ ,  $d.a.h. Q_k^o$  và  $d.a.h. R_A^o$  trong hệ cơ bản vẽ trên hình 5.76b, c, d.



Hình 5.76

Trên bảng 5.5 ghi các số liệu tính tung độ  $d.a.h. M_k$  và  $d.a.h. Q_k$ . Trên bảng 5.6 ghi các số liệu tính tung độ  $d.a.h. R_A$ .

Từ kết quả tính toán trên bảng 5.5 và 5.6 ta vẽ được  $d.a.h. M_k$ ;  $d.a.h. Q_k$  và  $d.a.h. R_A$  (hình 5.76e, f, g).

**Bảng 5.5**

Điểm	$\bar{D}.a.h.X_2$	$-(\bar{d}.a.h.X_3)/2$	$\bar{D}.a.h.M_k^p$	$\bar{D}.a.h.M_k$	$\bar{D}.a.h.X_3$	$\bar{D}.a.h.Q_k^p$	$\bar{D}.a.h.Q_k$
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	-0,013.1	-0,039.1	0,000	-0,052.1	0,078	0,000	0,078
2	-0,027.1	-0,063.1	0,000	-0,090.1	0,125	0,000	0,125
3	-0,027.1	-0,054.1	0,000	-0,081.1	0,109	0,000	0,109
4	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,065.1	0,109.1	-0,250.1	-0,076.1	-0,219	1,000	0,781
6	0,170.1	0,250.1	-0,500.1	-0,080.1	-0,500	1,000	0,500
5'	0,065.1	-0,109.1	0,000	-0,044.1	0,219	0,000	0,219
4'	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3'	-0,027.1	0,054.1	0,000	0,027.1	-0,109	0,000	-0,109
2'	-0,027.1	0,063.1	0,000	0,036.1	-0,125	0,000	-0,125
1'	-0,013.1	0,039.1	0,000	0,026.1	-0,078	0,000	-0,078
0'	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

**Bảng 5.6**

Điểm	$(\bar{d}.a.h.X_1)/2$	$-(\bar{d}.a.h.X_2)/1$	$-(\bar{d}.a.h.X_3)/2$	$\bar{D}.a.h.R^o_A$	$\bar{D}.a.h.R_A$
0	0,000	0,000	0,000	1,000	1,000
1	0,050	-0,013	-0,039	0,750	0,748
2	0,053	-0,027	-0,063	0,500	0,464
3	0,030	-0,027	-0,054	0,250	0,199
4	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	-0,020	0,065	0,109	-0,250	-0,096
6	-0,027	0,170	0,250	-0,500	-0,207
5'	-0,020	0,065	0,109	0,000	-0,064
4'	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3'	0,030	-0,027	0,054	0,000	0,057
2'	0,053	-0,027	0,063	0,000	0,088
1'	0,050	-0,013	0,039	0,000	0,076
0'	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000



## 5.12. Biểu đồ bao nội lực trong hệ siêu tĩnh

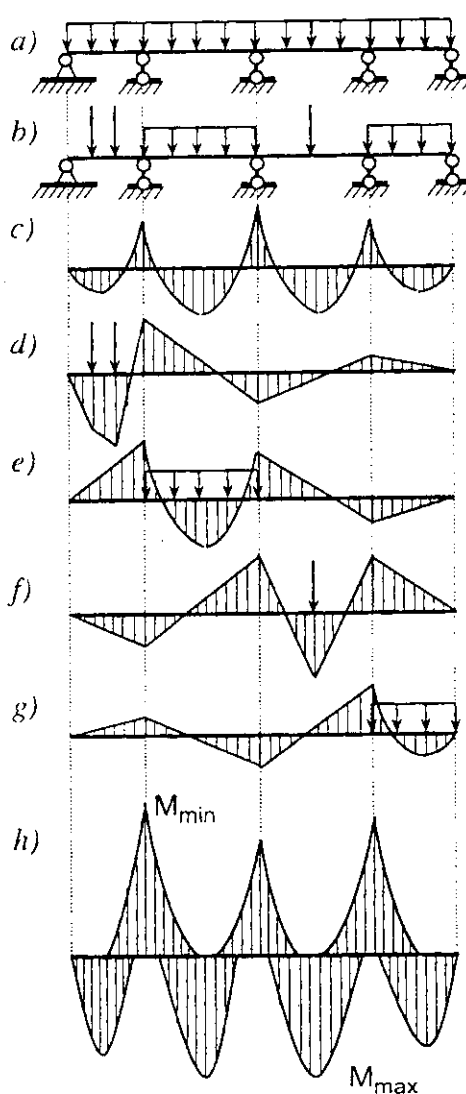
Khi thiết kế kết cấu ta phải xác định tiết diện của hệ theo những giá trị đại số lớn nhất và bé nhất của nội lực. Do đó cần phải xác định các giá trị đại số lớn nhất (max) và bé nhất (min) của nội lực tại tất cả các tiết diện trên hệ do tải trọng tác dụng lâu dài cũng như do tải trọng tác dụng tạm thời gây ra. Nói khác đi là phải vẽ *biểu đồ bao nội lực*.

Ta sẽ tìm hiểu cách vẽ biểu đồ bao nội lực trong hệ siêu tĩnh thông qua trường hợp dầm liên tục.

Để giải chính xác bài toán này ta cần vẽ đường ảnh hưởng của nội lực tại nhiều tiết diện khác nhau, tìm vị trí bất lợi của các tải trọng tạm thời và tiếp đó thực hiện theo các quy cách đã trình bày trong 3.10. Tuy nhiên, cần thấy là đối với các hệ siêu tĩnh, cách làm này thường đòi hỏi tốn nhiều công phu.

Để bài toán được đơn giản trong thực hành thường cho phép áp dụng giả thiết: *xem tải trọng tạm thời tác dụng trên từng nhịp dầm có vị trí cố định, có thể vắng mặt hoặc có mặt đồng thời trên một số nhịp để sao cho gây ảnh hưởng bất lợi nhất đối với nội lực tại tiết diện đang xét.*

Dưới đây ta sẽ tìm hiểu cách giải thông qua trường hợp dầm liên tục bốn nhịp cho trên hình 5.77a. Giả sử dầm chịu tải trọng lâu dài như trên hình 5.77a và chịu tải trọng tạm thời như trên hình 5.77b. Hình 5.77c là biểu đồ



Hình 5.77

mômen uốn do tải trọng lâu dài gây ra còn các hình 5.77d, e, f, g là biểu đồ mômen uốn do tải trọng tạm thời lần lượt đặt trong từng nhịp gây ra.

Để tìm giá trị  $M_{k,max}$  cho tiết diện  $k$  bất kỳ của dầm liên tục ta cộng đại số giá trị mômen  $M_k^*$  tương ứng tại tiết diện đó do tải trọng lâu dài gây ra (tìm theo biểu đồ 5.77c) với những giá trị mômen dương  $M_k^+$  do tải trọng tạm thời trên từng nhịp dầm gây ra. Các tải trọng gây ra mômen âm tại tiết diện không gây ảnh hưởng bất lợi khi tìm  $M_{k,max}$  nên coi như không có mặt. Như vậy ta có:

$$M_{k,max} = M_k^* + \sum M_k^+$$

Tương tự, để tìm giá trị  $M_{k,min}$  cho tiết diện  $k$  bất kỳ ta cộng đại số giá trị của mômen  $M_k^*$  do tải trọng lâu dài gây ra với các giá trị mômen âm  $M_k^-$  do tải trọng tạm thời trên từng nhịp gây ra:

$$M_{k,min} = M_k^* + \sum M_k^-$$

Như vậy, với mỗi tiết diện  $k$  của dầm liên tục ta có một giá trị  $M_{k,max}$  và một giá trị  $M_{k,min}$ . Dựa vào những giá trị này ta vẽ được hai đường cong gọi là biểu đồ bao mômen uốn trong dầm (hình 5.77h).

Để vẽ biểu đồ bao lực cắt của dầm ta cũng thực hiện các bước tính tương tự.

## CÂU HỎI ÔN TẬP

- 5.1. Định nghĩa hệ siêu tĩnh. Thông qua các ví dụ, nêu các tính chất của hệ siêu tĩnh so với hệ tĩnh định có cùng điều kiện làm việc như nhau.
- 5.2. Nêu các công thức xác định bậc siêu tĩnh và các điều cần chú ý khi sử dụng công thức.
- 5.3. Trình bày tóm tắt nội dung phương pháp lực.
- 5.4. Nêu cách chọn hệ cơ bản và các điều cần chú ý khi chọn hệ cơ bản. Thế nào là hệ cơ bản hợp lý, cho ví dụ minh họa.
- 5.5. Trình bày cách tính khung siêu tĩnh chịu tải trọng bất động.
- 5.6. Trình bày cách tính dàn siêu tĩnh chịu tải trọng bất động.

- 5.7. Trình bày cách tính vòm siêu tĩnh chịu tải trọng bất động.
- 5.8. Trình bày cách tính hệ liên hợp siêu tĩnh chịu tải trọng bất động.
- 5.9. Trình bày thứ tự tính hệ siêu tĩnh chịu biến thiên nhiệt độ, chế tạo chiều dài không chính xác của các thanh và chuyển vị cưỡng bức của liên kết tựa.
- 5.10. Nêu các công thức kiểm tra đối với các hệ số và số hạng tự do trong hệ phương trình chính tắc. Nêu cách kiểm tra biểu đồ nội lực trong kết quả cuối cùng.
- 5.11. Trình bày cách xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh.
- 5.12. Lập bảng đối chiếu cách tính hệ siêu tĩnh chịu các nguyên nhân khác nhau qua từng khâu tính toán, khi chọn hệ cơ bản tĩnh định.
- 5.13. Trình bày các biện pháp nhằm giảm nhẹ khối lượng tính toán khi tính hệ siêu tĩnh bậc cao.
- 5.14. Trình bày cách vận dụng cặp ẩn số để tính các hệ đối xứng.
- 5.15. Trình bày cách biến đổi sơ đồ khi tính các hệ đối xứng.
- 5.16. Trình bày cách sử dụng thanh tuyệt đối cứng để biến đổi vị trí và phương của các ẩn số nhằm đơn giản hóa tính toán.
- 5.17. Trình bày khái niệm, hiệu quả và điều kiện áp dụng tâm đàn hồi.
- 5.18. Viết và giải thích các đại lượng trong phương trình ba mômen để tính dầm liên tục chịu tải trọng bất động, chịu sự biến thiên nhiệt độ và chịu chuyển vị cưỡng bức của liên kết tựa
- 5.19. Thiết lập công thức tính các hệ số và số hạng tự do trong phương trình ba mômen.
- 5.20. Phương pháp tiêu cự mômen: cơ sở lý luận và điều kiện áp dụng; tỷ số tiêu cự mômen phụ thuộc những yếu tố nào; nêu thứ tự thực hiện phương pháp.
- 5.21. Trình bày cách thiết lập phương trình năm mômen để tính dầm liên tục trên gối tựa đàn hồi chịu tải trọng bất động.
- 5.22. Nêu ý nghĩa của tung độ biểu đồ bao nội lực và trình bày các bước thực hiện để vẽ biểu đồ bao nội lực trong dầm liên tục.

Hệ trên hình 6.1a, trong đó tại các nút  $A$  và  $B$  có đặt liên kết mômen ngăn cản chuyển vị xoay, là hệ xác định động nếu thừa nhận giả thiết 3. Khi cho liên kết  $C$  chuyển vị cưỡng bức theo phương ngang là  $\Delta$  thì từ các điều kiện hình học ta dễ dàng thấy được các nút  $A$  và  $B$  có cùng chuyển vị ngang là  $\Delta$  và không có chuyển vị xoay. Nếu thừa nhận giả thiết 1 thì biến dạng ở hai đầu mỗi cấu kiện có thể xác định theo chuyển vị ở các nút hệ. Do đó, ta cũng có thể phát biểu:

*Hệ xác định động là những hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức ta có thể xác định được chuyển vị tại các nút theo các điều kiện hình học.*

Ngược lại, hệ siêu động là những hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, nếu chỉ dùng các điều kiện động học (hình học) không thôi thì chưa đủ để xác định tất cả các chuyển vị tại các nút hệ. Lúc này, cần bổ sung các điều kiện cân bằng.

Hệ trên hình 6.1b là siêu động. Khi liên kết  $C$  chuyển vị ngang là  $\Delta$ , nếu thừa nhận giả thiết 3 thì ta cũng chỉ xác định được chuyển vị thẳng tại nút  $A$  và  $B$  theo điều kiện hình học còn chuyển vị xoay tại  $A$  và  $B$  vẫn chưa biết.

Qua hai ví dụ trên ta nhận thấy khái niệm về hệ xác định động và hệ siêu động có liên quan đến việc chấp nhận các giả thiết. Thật vậy, nếu phủ nhận giả thiết 3 thì hệ trên hình 6.1a vẫn là siêu động bởi vì tuy đã biết chuyển vị ngang tại nút  $B$  là  $\Delta$  nhưng vẫn chưa thể xác định chuyển vị ngang tại  $A$  nếu không vận dụng các điều kiện cân bằng. Hơn nữa, lúc này tại nút  $A$  và  $B$  có thể tồn tại chuyển vị đứng chưa biết.

Trong thực tế, phần lớn các hệ là siêu động. Phương pháp chuyển vị được xây dựng để nghiên cứu các hệ siêu động. Song hệ siêu động đồng thời có thể là siêu tĩnh hay tĩnh định. Ta chỉ vận dụng phương pháp chuyển vị để tính hệ siêu động đồng thời là siêu tĩnh. Còn đối với hệ siêu động đồng thời là tĩnh định thì việc xác định nội lực và chuyển vị đã quen thuộc sau khi nghiên cứu phân kết cấu tĩnh định.

### **C. Bậc siêu động**

Trong phương pháp lực ta đã xây dựng khái niệm về bậc siêu tĩnh. Tương tự, để tính hệ thanh theo phương pháp chuyển vị, ta cần xây dựng khái niệm về bậc siêu động.

*Bậc siêu động của hệ siêu động được xác định bằng số chuyển vị độc lập chưa biết của các nút trong hệ.*

Nếu thừa nhận các giả thiết đã nêu ở trên thì bậc siêu động được xác định theo công thức sau:

$$n = n_1 + n_2 \quad (6.1)$$

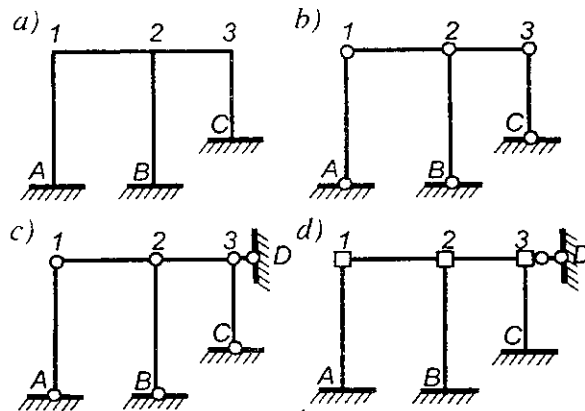
$n_1$  – số chuyển vị xoay độc lập chưa biết của các nút và các ngàm đàn hồi trong hệ;

$n_2$  – số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết của các nút trong hệ.

Số chuyển vị xoay  $n_1$  được xác định dễ dàng theo số nút và số ngàm đàn hồi của hệ. Ví dụ, với hệ trên hình 6.2a và 6.3a, ta có  $n_1 = 3$ .

Số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết của các nút thường khó thấy ngay được vì chuyển vị thẳng của các nút trong hệ thường không độc lập mà có liên quan với nhau theo giả thiết 3.

Để thấy rõ điều này, ta xét khung trên hình 6.2a. Các nút 1, 2, 3 lần lượt bị các thanh A-1, B-2, C-3 ngăn cản nên không có chuyển vị theo phương thẳng đứng, chúng chỉ có thể chuyển vị theo phương ngang. Nhưng khi chuyển vị theo



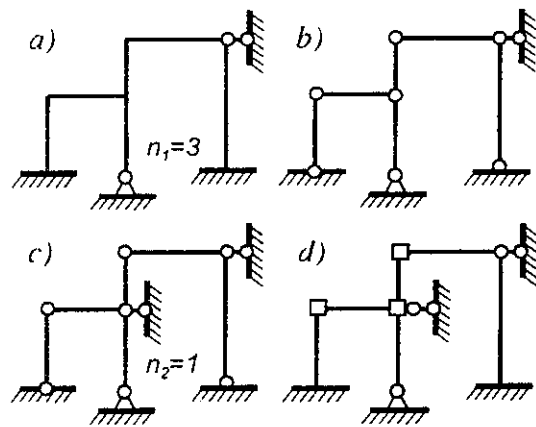
Hình 6.2

phương ngang, theo giả thiết 3, chiều dài của các thanh 1-2 và 2-3 không đổi nên chuyển vị thẳng theo phương ngang của ba nút 1, 2, 3 bằng nhau. Nói khác đi, chỉ cần biết chuyển vị của một trong ba nút đó là đủ, nghĩa là hệ chỉ có một chuyển vị thẳng theo phương ngang chưa biết nên  $n_2 = 1$ . Tuy nhiên, cách lập luận vừa trình bày chỉ áp dụng dễ dàng cho những hệ đơn giản. Cần có một cách tìm thực hành tổng quát để xác định số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết  $n_2$ .

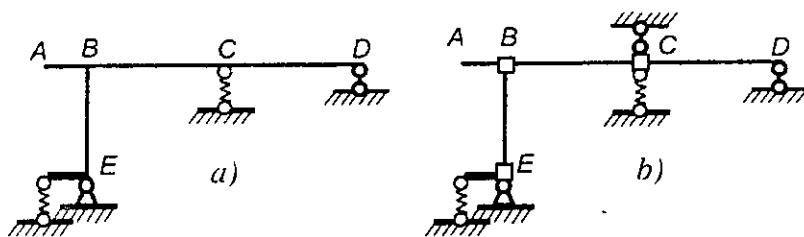
Nếu chấp nhận giả thiết 3, ta có thể xác định  $n_2$  theo cách sau: *Tương tự thay các nút và các liên kết ngàm của hệ bằng các khớp sẽ được một hệ mới, nói chung là biến hình. Thêm vào hệ mới đó các liên kết loại một (liên kết thanh) vừa đủ để sao cho hệ trở thành bất biến hình. Số liên kết cần thêm vào đó chính là số  $n_2$  cần tìm.*

Thật vậy, nếu chỉ nhằm mục đích tìm số lượng chuyển vị thẳng chưa biết của các nút thì sơ đồ hệ đã thay khớp cho ta hình dung được rõ ràng những chuyển vị thẳng của hệ đồng thời thỏa mãn giả thiết 3 khi khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ. Khi thêm các liên kết loại một vừa đủ để cho hệ bất biến hình tức là ngăn cản các chuyển vị thẳng có thể xảy ra tại các nút hệ, do đó số liên kết thanh phải thêm vào hệ đã thay khớp chính là số chuyển vị thẳng độc lập còn chưa biết của hệ cho ban đầu. Ví dụ, với hệ trên hình 6.3a, sau khi đặt khớp vào các nút và ngàm ta được hệ mới như trên hình 6.3b, để cho hệ này trở thành bất biến hình cần đặt thêm một liên kết thanh như trên hình 6.3c, như vậy  $n_2 = 1$ .

Nếu phủ nhận giả thiết 3 thì  $n_1$  không đổi còn  $n_2$  sẽ tăng lên. Thật vậy, khi xét đến ảnh hưởng của biến dạng dọc trục thì chuyển vị thẳng tại các nút sẽ độc lập với nhau, tại mỗi nút và khớp nối chung tồn tại hai chuyển vị thẳng chưa biết. Do đó  $n_2$  được xác định bằng hai lần số nút và khớp trừ cho số chuyển vị thẳng đã biết (khi tại đó có đặt liên kết ngăn cản chuyển vị thẳng). Ví dụ với hệ trên hình 6.3a, ta có  $n_2 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$ .



Hình 6.3



Hình 6.4

Với hệ có liên kết đàn hồi trên hình 6.4: chuyển vị xoay tại các nút cứng B, C và tại ngàm đàn hồi E là chưa biết và độc lập nên  $n_1 = 3$ ; chuyển vị thẳng độc lập chưa biết bao gồm chuyển vị ngang bằng nhau tại các nút B, C và chuyển vị thẳng đứng tại nút C. Do đó  $n_2 = 2$ .

Ta thấy, trong phương pháp lực, khái niệm về bậc siêu tĩnh là không đổi. Trong phương pháp chuyển vị, khái niệm về bậc siêu động có tính chất quy ước, có thể thay đổi và phụ thuộc vào ba yếu tố sau:

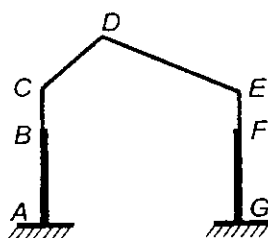
\* Phụ thuộc các giả thiết chấp nhận (như đã trình bày ở trên).

\* Phụ thuộc sơ đồ tính rời rạc hóa chấp nhận.

Chẳng hạn, khi tính hệ có thanh cong, ta thay thanh cong bằng thanh gãy khúc, bậc siêu động phụ thuộc số đỉnh của thanh gãy khúc thay thế.

\* Phụ thuộc các phần tử mẫu mà người thiết kế đã có sẵn.

Khi tính toán hệ thanh theo phương pháp chuyển vị ta cần vận dụng các phần tử mẫu đã được nghiên cứu trước. Phần tử mẫu đơn giản nhất là thanh thẳng có tiết diện không đổi. Trong một số tài liệu còn cung cấp các phần tử mẫu phức tạp hơn như: thanh gãy khúc hình tam giác, thanh cong, thanh có tiết diện thay đổi...



Hình 6.5

Nếu vận dụng các phần tử mẫu phức tạp này thì bậc siêu động của hệ sẽ giảm xuống. Với hệ trên hình 6.5, nếu chỉ dùng các phần tử mẫu dưới dạng thanh thẳng có tiết diện không đổi thì hệ có sáu phần tử, năm nút, do đó  $n=5+4=9$ . Nếu dùng phần tử dưới dạng thanh gãy khúc (CDE) và thanh có tiết diện thay đổi (ABC và EFG) thì hệ có ba phần tử, hai nút C và E với hai chuyển vị ngang độc lập tại C và E, do đó  $n=2+2=4$ .

## 6.2. Cách tính hệ siêu động chịu tải trọng bất động

### A. Nội dung phương pháp chuyển vị

Tương tự như phương pháp lực, có thể tóm tắt nội dung phương pháp chuyển vị như sau: để tính hệ siêu động, ta không tính trực tiếp trên hệ đó mà thực hiện tính toán trên hệ cơ bản đồng thời bổ sung các điều kiện đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống như hệ thực.

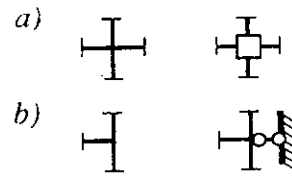
Dưới đây ta sẽ lần lượt triển khai cụ thể nội dung đã nêu của phương pháp.

### B. Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị

Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị là hệ suy ra từ hệ siêu động đã cho bằng cách đặt thêm vào hệ những liên kết phụ nhằm ngăn cản chuyển vị xoay và chuyển vị thẳng của các nút trong hệ.

Những liên kết phụ đặt thêm vào hệ gồm hai loại:

✦ **Liên kết mômen:** đặt vào các nút có chuyển vị xoay, có tác dụng làm cho nút không thể xoay được nhưng vẫn có thể chuyển vị thẳng (khác với liên kết ngàm vì liên kết ngàm còn ngăn cản cả chuyển vị thẳng). Quy ước vẽ liên kết mômen như trên hình 6.6a. Trong liên kết mômen chỉ phát sinh phản lực mômen (phản lực dưới dạng mômen).



Hình 6.6

✦ **Liên kết lực:** đặt vào các nút có chuyển vị thẳng được chọn làm ẩn số, có tác dụng làm cho nút không chuyển vị thẳng được. Liên kết lực được mô tả bằng liên kết thanh. Trên hình 6.6b là liên kết lực ngăn cản chuyển vị thẳng theo phương ngang của nút. Trong liên kết lực chỉ phát sinh phản lực lực (phản lực dưới dạng lực) dọc theo trục của liên kết.

Với các hệ trên hình 6.2a, 6.3a, 6.4a, sau khi thêm các liên kết phụ ngăn cản toàn bộ chuyển vị của các nút, ta được hệ cơ bản như trên hình 6.2d, 6.3d, 6.4b.

Hệ cơ bản có thể là xác định động hoặc siêu động. Nếu số liên kết đặt thêm vào hệ bằng số bậc siêu động (tức là với số liên kết đó thì có thể ngăn cản toàn bộ chuyển vị tại các nút) thì hệ cơ bản là xác định động. Nếu số liên kết đặt thêm vào hệ ít hơn số bậc siêu động (tức là với số liên kết đó thì chưa ngăn cản được toàn bộ chuyển vị tại các nút) thì hệ cơ bản là siêu động với bậc thấp hơn.

Điều quan trọng khi lập hệ cơ bản là trong hệ cơ bản chỉ tồn tại những phần tử mẫu đã được nghiên cứu trước. Nếu dùng hệ cơ bản xác định động thì yêu cầu này luôn thỏa mãn.

Khác với hệ cơ bản của phương pháp lực, hệ cơ bản trong phương pháp chuyển vị là duy nhất nếu các yếu tố có ảnh hưởng đến bậc siêu động nêu ở trên đã được xác định.

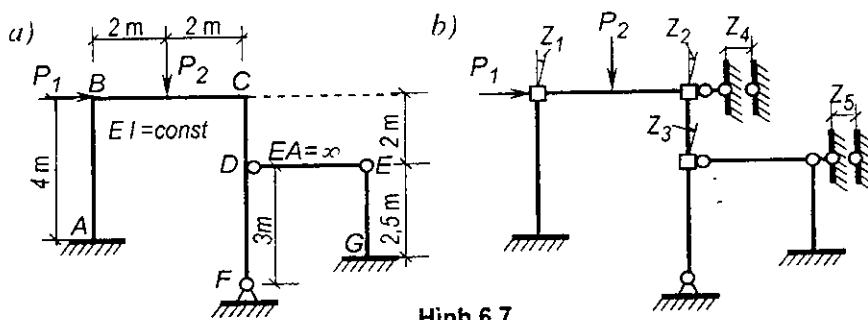
### C. Hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị

Tương tự như trong phương pháp lực, hệ phương trình chính tắc trong phương pháp chuyển vị là điều kiện bổ sung nhằm đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống hệ thực. Do đó, để xây dựng hệ phương trình chính tắc ta cần so sánh sự khác nhau về mặt chuyển vị và phản lực giữa hệ cơ bản và hệ thực.



Giả sử xét hệ siêu động như trên hình 6.7a và hệ cơ bản tương ứng như trên hình 6.7b ta thấy:

- ❖ Trong hệ siêu động cho ban đầu, chuyển vị tại các nút (chuyển vị xoay và chuyển vị thẳng theo phương ngang tại các nút  $B, C, D$ ) nói chung tồn tại. Vì không có các liên kết đặt thêm vào nút nên không có phản lực ngăn cản những chuyển vị này.
- ❖ Trong hệ cơ bản, chuyển vị tại các nút nêu ở trên không có vì tại đó tồn tại các liên kết ngăn cản. Trong các liên kết, nói chung tồn tại các thành phần phản lực tương ứng.



Hình 6.7

Để đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống hệ thực, ta cần tạo ra trong hệ cơ bản những chuyển vị cưỡng bức tương ứng tại các liên kết đặt thêm vào hệ. Nếu hệ cơ bản là xác định động, lần lượt ký hiệu các chuyển vị là  $Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dots, Z_n$ , với  $Z_k$  là chuyển vị cưỡng bức tại liên kết thứ  $k$  đặt thêm vào hệ. Các chuyển vị này chưa biết và giữ vai trò là ẩn số của phương pháp chuyển vị. Tất nhiên, các chuyển vị  $Z_k$  cần phải có giá trị để sao cho phản lực tại các liên kết đặt thêm vào hệ do chúng gây ra và do tải trọng gây ra phải bằng không.

Như vậy, ta có  $n$  điều kiện để xác định  $n$  chuyển vị  $Z_k$  cần tìm như sau:

$$R_k(Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dots, Z_n, P) = 0 \quad \text{với } k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.2)$$

Theo nguyên lý cộng tác dụng ta có thể viết:

$$R_k(Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dots, Z_n, P) = R_{kZ_1} + R_{kZ_2} + \dots + R_{kZ_k} + \dots + R_{kZ_n} + R_{kP},$$

trong đó:

$R_{kZ_i}$  :- phản lực tại liên kết thứ  $k$  trong hệ cơ bản, do riêng chuyển vị cưỡng bức tại liên kết thứ  $i$  gây ra;

$R_{kp}$  – phản lực tại liên kết thứ  $k$  do riêng tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

Nếu gọi  $r_{ki}$  là phản lực tại liên kết thứ  $k$  do riêng chuyển vị cưỡng bức  $Z_i = 1$  tại liên kết thứ  $i$  gây ra trong hệ cơ bản ta có:

$$R_{kZ_i} = r_{ki}Z_i.$$

Như vậy, điều kiện (6.2) sẽ có dạng:

$$\boxed{r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \dots + r_{kk}Z_k + \dots + r_{kn}Z_n + R_{kp} = 0,} \quad (6.3)$$

với  $k = 1, 2, \dots, n.$

Đó là hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị.

Trong hệ phương trình chính tắc,  $r_{kk}$  là hệ số chính;  $r_{ki}$  là hệ số phụ còn  $R_{kp}$  là số hạng tự do. Để thống nhất, ta quy ước chiều dương của các phản lực này cùng chiều với chiều dương của các chuyển vị cưỡng bức. Theo định lý tương hỗ của các phản lực đơn vị, ta có:

$$r_{ki} = r_{ik}.$$

#### **D. Cách xác định nội lực trong hệ cơ bản xác định động**

Để chuẩn bị cho việc xác định các hệ số, số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc và xác định nội lực trong hệ siêu động sau này, ta cần biết cách vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ cơ bản xác định động chịu tác dụng của các nguyên nhân khác nhau.

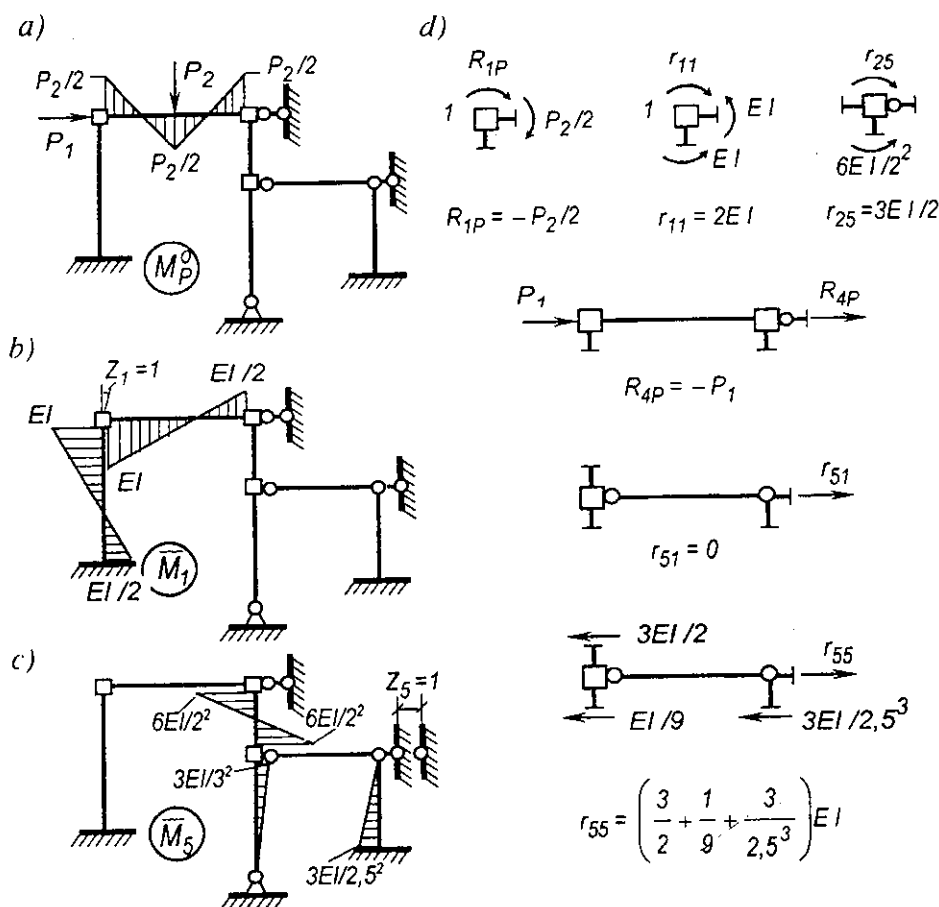
##### **1. Biểu đồ nội lực do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản**

Như đã biết, trong hệ cơ bản xác định động chỉ bao gồm những phần tử đơn giản, tức là những thanh thẳng có tiết diện không đổi, liên kết ở hai đầu có thể là ngàm, khớp hoặc ngàm trượt. Do đó, tải trọng tác dụng trên hệ cơ bản chỉ gây ảnh hưởng cục bộ trong từng phần tử. Bởi vậy, để vẽ biểu đồ nội lực  $S_p^0$  trên toàn hệ cơ bản ta chỉ cần vẽ riêng rẽ trên từng phần tử đơn giản của hệ.

Để thuận tiện cho việc tính toán, người ta đã sử dụng phương pháp xác định sẵn nội lực trong những phần tử đơn giản tương ứng với các dạng tải trọng khác nhau thường gặp trong thực tế. Nếu bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt thì kết quả thu được như trong bảng 6.1.

Với hệ cơ bản của hệ siêu động cho trên hình 6.7a, tải trọng chỉ gây ảnh hưởng cục bộ trong phạm vi thanh  $BC$ . Sử dụng các số liệu cho trong

bảng 6.1 ta vẽ được biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản như trên hình 6.8a.



Hình 6.8

## 2. Biểu đồ nội lực do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị gây ra trong hệ cơ bản

Cũng tương tự như trên, để phục vụ cho việc tính toán, người ta dùng phương pháp lực hoặc phương pháp thông số ban đầu xác định sẵn nội lực trong những phần tử đơn giản chịu tác dụng của các chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị. Nếu bỏ qua biến dạng trượt thì kết quả thu được như trong bảng 6.2.

Trên hình 6.8b và c là các biểu đồ mômen uốn lần lượt do các chuyển vị cưỡng bức  $Z_1$  và  $Z_5$  bằng đơn vị gây ra trong hệ cơ bản.

**Bảng 6.1**

TT	Sơ đồ	$M_0$	$M_1$	$Q_0$	$Q_1$
1		$-\frac{Pab^2}{l^2}$	$-\frac{Pa^2b}{l^2}$	$\frac{Pb^2}{l^3} \times (l+2a)\cos\alpha$	$-\frac{Pa^2}{l^3} \times (3l-2a)\cos\alpha$
2		$\frac{Mb}{l^2}(2a-b)$	$\frac{Ma}{l^2}(a-2b)$	$-\frac{6Mab}{l^3}\cos\alpha$	
3		$-\frac{ql^2}{12}$	$-\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql}{2}\cos\alpha$	$-\frac{ql}{2}\cos\alpha$
4		$\frac{2\omega_M}{l} \times (3\mu-1)$	$-\frac{2\omega_M}{l} \times (3\lambda-1)$	$\left[ R_0^0 - \frac{M_0 - M_1}{l} \right] \times \cos\alpha$	$\left[ -R_1^0 - \frac{M_0 - M_1}{l} \right] \times \cos\alpha$
5		0	0	$-m\cos\alpha$	$-m\cos\alpha$

Bảng 6.1 (tiếp)

TT	Sơ đồ	$M_0$	$M_1$	$Q_0$	$Q_1$
6		$-\frac{2\omega_M}{l} \times (3\mu - 1)$	$-\frac{2\omega_M}{l} \times (3\lambda - 1)$	$\left[ R_0^0 - \frac{M_0 - M_1}{l} \right] \times \cos \alpha$	$\left[ -R_1^0 - \frac{M_0 - M_1}{l} \right] \times \cos \alpha$
7		$-\frac{\alpha_t E I}{h} (t_2 - t_1)$ $\alpha_t$ - hệ số dẫn nở dài vì nhiệt		0	0
8		$-\frac{Pab}{2l^2} \times (2l - a)$	0	$\frac{Pb}{2l} \times \left[ 3 - \frac{b^2}{l^2} \right] \cos \alpha$	$-\frac{Pa^2}{2l^2} \times \left[ 3 - \frac{a}{l} \right] \cos \alpha$
9		$\frac{M}{2} \left[ 1 - \frac{3b^2}{l^2} \right]$	0	$-\frac{3M}{2l^3} (l^2 - b^2) \cos \alpha$	
10		$-\frac{ql^2}{8}$	0	$\frac{5ql}{8} \cos \alpha$	$-\frac{3ql}{8} \cos \alpha$

Bảng 6.1 (tiếp)

TT	Sơ đồ	$M_0$	$M_1$	$Q_0$	$Q_1$
11		$-\frac{3\omega_M \mu}{l}$	0	$\left[ R_0^0 - \frac{M_0}{l} \right] \times \cos \alpha$	$\left[ -R_1^0 - \frac{M_0}{l} \right] \times \cos \alpha$
12		0	0	$-m \cos \alpha$	$-m \cos \alpha$
13		$-\frac{3\omega_M \mu}{l}$	0	$\left[ R_0^0 - \frac{M_0}{l} \right] \times \cos \alpha$	$\left[ -R_1^0 - \frac{M_0}{l} \right] \times \cos \alpha$
14		$-\frac{3\alpha_t E I}{2h} \times (t_2 - t_1)$	0	$\frac{3\alpha_t E I}{2h l} (t_2 - t_1) \cos \alpha$	$\alpha_t$ - hệ số dẫn nở dài vì nhiệt
15		$-\frac{Pa}{2} \left[ 2 - \frac{a}{l} \right]$	$\frac{Pa^2}{2l}$	P	0
16		$-\frac{Mb}{l}$	$\frac{Ma}{l}$	0	0

Bảng 6.1 (tiếp)

TT	Sơ đồ	$M_0$	$M_1$	$Q_0$	$Q_1$
17		$-\frac{ql^2}{3}$	$\frac{ql^2}{6}$	$ql$	$0$
18		$-\frac{\omega_M}{l} - \frac{R_1^0 l}{2}$	$-\frac{\omega_M}{l} + \frac{R_1^0 l}{2}$	$R_0^0 + R_1^0$	$0$
19		$-\frac{ml}{2}$	$\frac{ml}{2}$	$0$	$0$
20		$-\frac{\omega_M}{l} - \frac{R_1^0 l}{2}$	$-\frac{\omega_M}{l} + \frac{R_1^0 l}{2}$	$0$	$0$
21		$-\frac{\alpha_t E l}{h} (t_2 - t_1)$ $\alpha_t$ - hệ số dẫn nở dài vì nhiệt		$0$	$0$
22		Kết quả giống như trường hợp đầu phải bị ngâm cứng, tương ứng với từng nguyên nhân			

**Chú thích:**

- $\omega_M$  - diện tích biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong dầm đơn giản có nhịp  $l$ .
- $\lambda$  và  $\mu$  - tỷ số khoảng cách từ trọng tâm diện tích  $\omega_M$  đến đầu trái và đầu phải so với nhịp  $l$ .
- $R_0^0$  và  $R_1^0$  - phản lực tại đầu trái và đầu phải thanh do tải trọng gây ra trong dầm đơn giản, được tính theo chiều dài nhịp  $l$  với quy ước chiều dương hướng lên trên.
- Khi tải trọng thẳng đứng phân bố theo chiều dài xiên của thanh, các số liệu cần được chia cho  $\cos \alpha$ .



Bảng 6.2

TT	Sơ đồ và biểu đồ mômen uốn	$M_0$	$M_1$	$Q_0 = Q_1$
1		$\frac{4EI}{l} \cos \alpha$	$-\frac{2EI}{l} \cos \alpha$	$-\frac{6EI}{l^2} \cos^2 \alpha$
2		$-\frac{6EI}{l^2} \cos^2 \alpha$	$\frac{6EI}{l^2} \cos^2 \alpha$	$\frac{12EI}{l^3} \cos^3 \alpha$
3		$\frac{3EI}{l} \cos \alpha$	0	$-\frac{3EI}{l^2} \cos^2 \alpha$
4		$-\frac{3EI}{l^2} \cos^2 \alpha$	0	$\frac{3EI}{l^3} \cos^3 \alpha$
5		$\frac{EI}{l}$	$\frac{EI}{l}$	0

**Chú thích:**

1. Trong trường hợp 1 và 2, nếu ngàm bên phải là ngàm trượt dưới dạng hai thanh song song nhưng không song song với trục thanh như trường hợp 5, kết quả tính mômen uốn và lực cắt không thay đổi.
2. Trong trường hợp 3 và 4, nếu gối tựa bên phải không thẳng đứng mà nghiêng một góc bất kỳ, kết quả tính mômen uốn và lực cắt không thay đổi.



### **E. Cách xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc**

Về ý nghĩa, các hệ số  $r_{ki}$  và số hạng tự do  $R_{kP}$  chính là phản lực tại liên kết thứ  $k$  lần lượt do chuyển vị cưỡng bức  $Z_i = 1$  và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản. Do đó, tuy có nhiều cách xác định khác nhau nhưng biện pháp đơn giản nhất là vận dụng các điều kiện cân bằng tĩnh học. Sau khi vẽ được biểu đồ mômen uốn do các nguyên nhân  $Z_i = 1$  và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản ta dễ dàng xác định được phản lực trong các liên kết đặt thêm vào hệ tức là xác định được các hệ số và số hạng tự do.

#### **1. Trường hợp liên kết $k$ là liên kết mômen**

- ✦ Để xác định  $r_{ki}$  ta tách nút có đặt thêm liên kết mômen thứ  $k$  trên biểu đồ mômen uốn  $\bar{M}_i$  do  $Z_i = 1$  gây ra trên hệ cơ bản. Từ điều kiện cân bằng mômen của nút đó ta sẽ suy ra giá trị của  $r_{ki}$  cần tìm.
- ✦ Để xác định  $R_{kP}$  ta tách nút có đặt thêm liên kết mômen thứ  $k$  trên biểu đồ mômen uốn  $M_P^0$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản. Từ điều kiện cân bằng mômen của nút đó ta sẽ suy ra giá trị cần tìm của  $R_{kP}$ .

#### **2. Trường hợp liên kết $k$ là liên kết lực**

- ✦ Để xác định  $r_{ki}$  ta thực hiện mặt cắt qua liên kết  $k$  trên biểu đồ mômen uốn  $\bar{M}_i$  do riêng  $Z_i = 1$  gây ra trong hệ cơ bản nhằm tách ra khỏi hệ một bộ phận bất kỳ sao cho dễ dàng tìm được giá trị  $r_{ki}$  từ điều kiện cân bằng hình chiếu.
- ✦ Để xác định  $R_{kP}$  ta thực hiện mặt cắt qua liên kết  $k$  trên biểu đồ mômen uốn  $M_P^0$  do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản nhằm tách ra khỏi hệ một bộ phận nào đó để khảo sát cân bằng.

Trên hình 6.8đ lần lượt trình bày cách xác định  $R_{1P}$ ,  $r_{11}$ ,  $r_{25}$ ,  $R_{4P}$ ,  $r_{51}$ ,  $r_{55}$ .

Khi xác định cần chú ý:

- ❖ Chiều dương của các chuyển vị và phản lực tương ứng cần chọn thống nhất.
- ❖ Các hệ số chính luôn luôn dương, còn các hệ số phụ  $r_{ki} = r_{ik}$  có thể mang dấu bất kỳ hoặc bằng không.
- ❖ Khi liên kết  $k$  là liên kết mômen, ta chỉ cần xác định các mômen uốn quanh nút  $k$  là đủ để viết điều kiện cân bằng mômen. Khi liên kết  $k$  là

liên kết lực, ta chỉ cần xác định các lực cắt hoặc lực dọc vừa đủ để tham gia phương trình cân bằng hình chiếu.

### F. Cách xác định các đại lượng trong hệ siêu động

Sau khi thiết lập và giải hệ phương trình chính tắc, ta xác định được các chuyển vị  $Z_k$ . Đó là những giá trị của chuyển vị cần tìm nhằm đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống hệ thực. Như vậy, các đại lượng trong hệ siêu động cho ban đầu chính là các đại lượng tương ứng trong hệ cơ bản do tải trọng và do các chuyển vị cưỡng bức  $Z_k$  vừa tìm được gây ra. Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, ta có:

$$(S_P) = (S_{Z_1}) + (S_{Z_2}) + \dots + (S_{Z_k}) + \dots + (S_{Z_n}) + (S_P^0),$$

trong đó:

$(S_P)$  – biểu đồ đại lượng  $S$  do tải trọng gây ra trong hệ siêu động;

$(S_P^0)$  – biểu đồ đại lượng  $S$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản, cách xác định đã được trình bày ở điểm  $D$ ;

$(S_{Z_k})$  – biểu đồ đại lượng  $S$  do chuyển vị cưỡng bức  $Z_k$  gây ra trong hệ cơ bản.

Nếu gọi  $(\bar{S}_k)$  là biểu đồ đại lượng  $S$  do riêng chuyển vị cưỡng bức  $Z_k=1$  gây trong hệ cơ bản (cách tìm biểu đồ này đã được trình bày ở điểm  $D$ ), ta có:

$$(S_{Z_k}) = (\bar{S}_k)Z_k.$$

Như vậy, ta có thể xác định đại lượng  $S$  trong hệ siêu động theo biểu thức sau:

$$(S_P) = (\bar{S}_1)Z_1 + (\bar{S}_2)Z_2 + \dots + (\bar{S}_k)Z_k + \dots + (\bar{S}_n)Z_n + (S_P^0). \quad (6.4)$$

Biểu thức (6.4) áp dụng chung cho mọi trường hợp, giả sử muốn tìm mômen uốn  $M$  hay độ võng  $y$ , ta cần thay thế ký hiệu  $S$  bằng ký hiệu tương ứng  $M$  hay  $y$ . Đối với dầm và khung siêu động, vẽ biểu đồ mômen uốn theo cách này rất tiện lợi vì đã có sẵn các biểu đồ mômen uốn đơn vị trong quá trình xác định các hệ số. Sau khi có biểu đồ mômen uốn ta dễ dàng tìm được các biểu đồ lực cắt và lực dọc như đã thực hiện trong phương pháp lực.

Sau khi tìm được các nội lực, ta cần thực hiện kiểm tra kết quả. Trong thực hành, chỉ cần sử dụng điều kiện cân bằng của các nút và của các bộ

phần bất kỳ của hệ để kiểm tra kết quả tìm được.

### G. Cách xác định chuyển vị trong hệ siêu động

**1. Chuyển vị tại nút:** nếu chuyển vị cần tìm là chuyển vị xoay hoặc chuyển vị thẳng tại các nút thì chính là các chuyển vị  $Z_k$  tương ứng đã tìm được sau khi giải hệ phương trình chính tắc.

**2. Chuyển vị tại tiết diện bất kỳ ở bên trong các phần tử:** có thể xác định theo một trong ba cách sau:

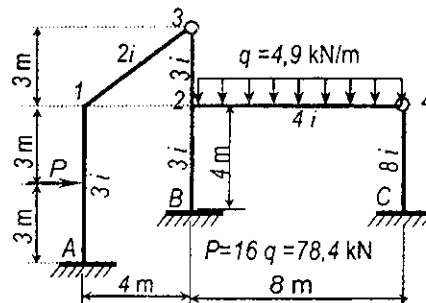
- Ngay từ đầu, coi tiết diện có chuyển vị cần tìm như một nút của hệ. Như vậy, ta đã đưa bài toán xác định chuyển vị tại tiết diện bất kỳ về bài toán tìm chuyển vị tại nút và thực hiện như đã nêu ở trên. Biện pháp này đơn giản, không cần phải thực hiện tính bổ sung nhưng làm tăng số lượng ẩn.
- Sau khi đã biết chuyển vị và nội lực ở hai đầu mỗi phần tử, ta có thể xác định chuyển vị tại tiết diện bất kỳ ở bên trong phần tử đó theo các phương pháp đã biết, chẳng hạn phương pháp xác định chuyển vị đã trình bày trong chương 4 hoặc phương pháp thông số ban đầu.
- Sau khi đã biết nội lực trong hệ siêu động, ta xem hệ là hệ siêu tĩnh với các nội lực đã biết và áp dụng cách xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh đã trình bày trong chương 5. Trong thực hành, nên áp dụng cách này.

### H. Ví dụ áp dụng

**Ví dụ 6.1.** Vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ cho trên hình 6.9. Trên hình cho biết các số liệu về độ cứng đơn vị của từng phần tử, biểu thị theo độ cứng đơn vị quy ước  $i = EI / l$ . Tìm chuyển vị ngang tại  $A$  và tại điểm đặt lực  $P$ .

Để giải bài toán, ta thực hiện theo thứ tự như sau:

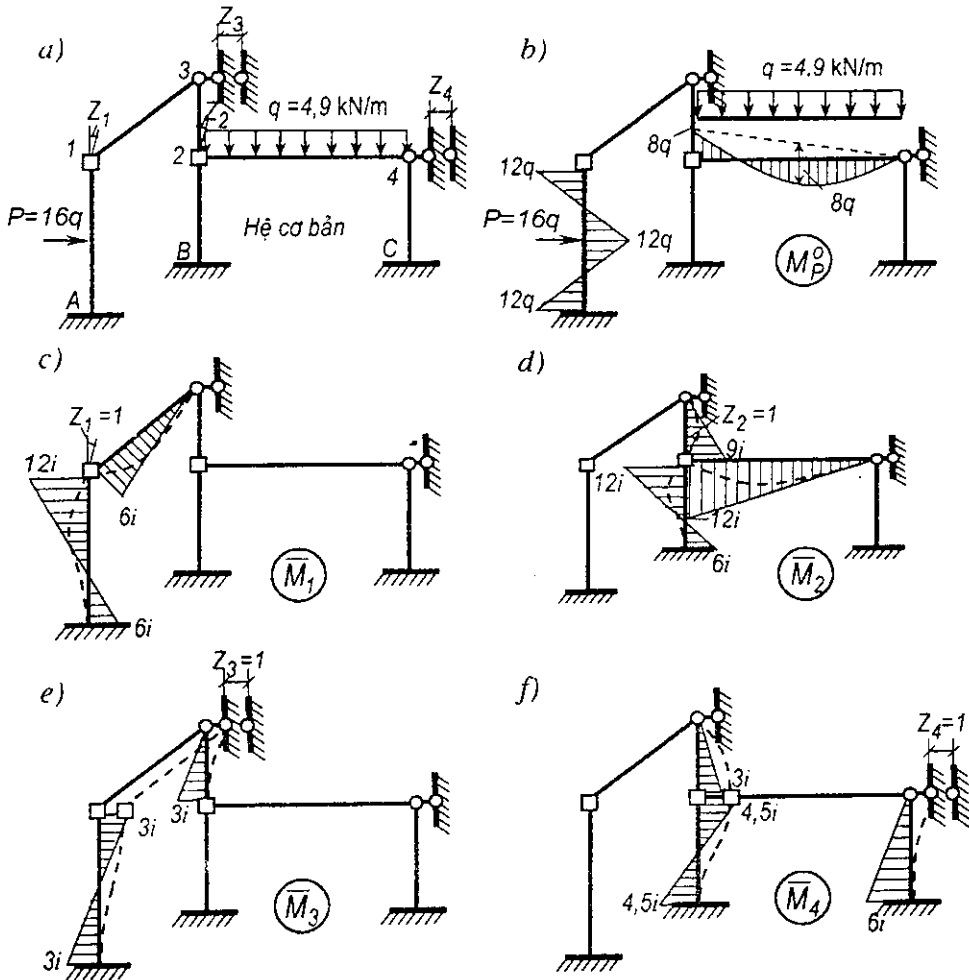
1) **Xác định bậc siêu động và lập hệ cơ bản.** Số chuyển vị xoay chưa biết là 2 (tại nút 1 và 2). Số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết là 2 (tại khớp 3 và 4). Do đó  $n = 4$ . Hệ cơ bản tương ứng như trên hình 6.10a, trong đó ta gọi các ẩn  $Z_1, Z_2$  là



Hình 6.9

chuyển vị xoay tại nút 1, 2 còn các ẩn  $Z_3, Z_4$  là chuyển vị thẳng theo phương ngang tại khớp 3 và 4.

2) Vẽ biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản. Vận dụng các số liệu trong bảng 6.1, ta dễ dàng vẽ được biểu đồ  $M_P^0$  như trên hình 6.10b.

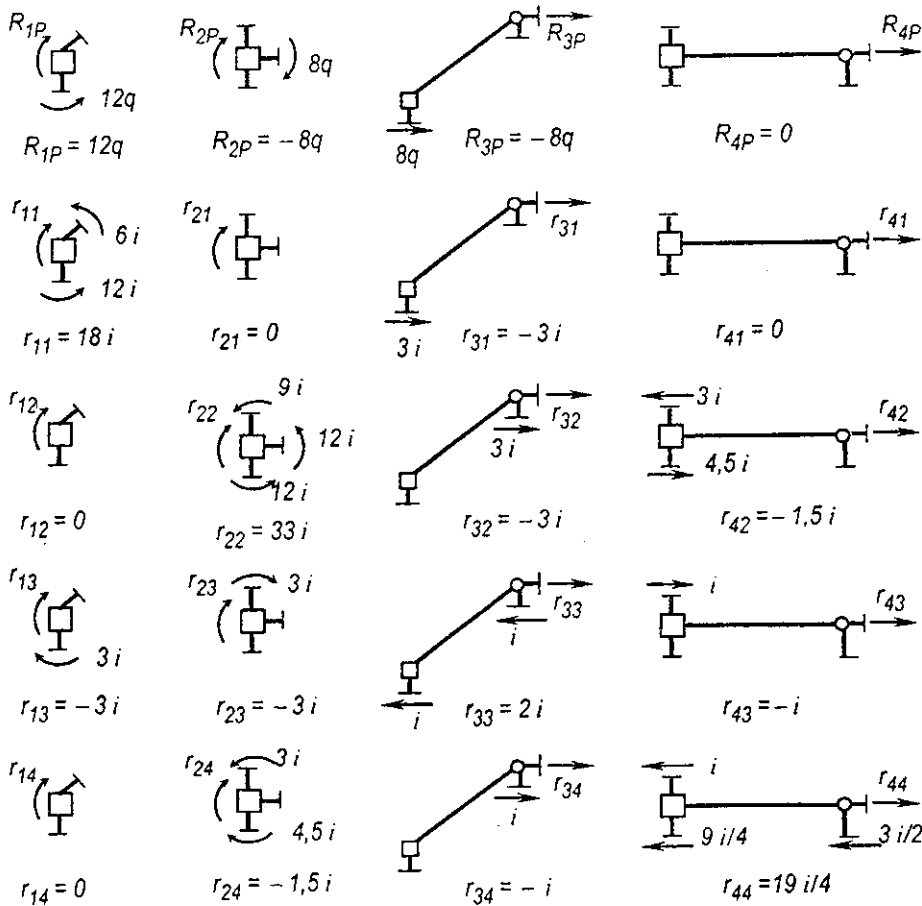


Hình 6.10

3) Vẽ biểu đồ mômen uốn do từng chuyển vị đơn vị gây ra trong hệ cơ bản. Vận dụng các số liệu trong bảng 6.2, vẽ các biểu đồ lần lượt do  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  bằng đơn vị gây ra trong hệ cơ bản, kết quả như trên các hình

6.10c, d, e, f. Khi thực hiện, nên căn cứ vào nguyên nhân  $Z_k$ , vẽ phác dạng đường biến dạng tương ứng (đường đứt nét) để đặt đúng chiều thoả căng của biểu đồ mômen, tránh những sai lầm về dấu.

4) *Xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc.* Để xác định các hệ số và số hạng tự do biểu thị phản lực mômen trong liên kết mômen, ta tách các nút 1 và 2 và khảo sát cân bằng. Kết quả ghi trên hình 6.11. Để xác định các hệ số và số hạng tự do biểu thị phản lực lực trong các liên kết lực 3 và 4, ta lần lượt tách các bộ phận của hệ như trên hình 6.12 để xét cân bằng. Kết quả ghi trên hình vẽ tương ứng.



Hình 6.11

Hình 6.12

5) *Thiết lập và giải hệ phương trình chính tắc.* Trong trường hợp này, ta có:

$$\begin{aligned}
 18iZ_1 - 3iZ_3 + 12q &= 0; \\
 33iZ_2 - 3iZ_3 - 1,5iZ_4 - 8q &= 0; \\
 -3iZ_1 - 3iZ_2 + 2iZ_3 - iZ_4 - 8q &= 0; \\
 -1,5iZ_2 - iZ_3 + 4,75iZ_4 &= 0.
 \end{aligned}$$

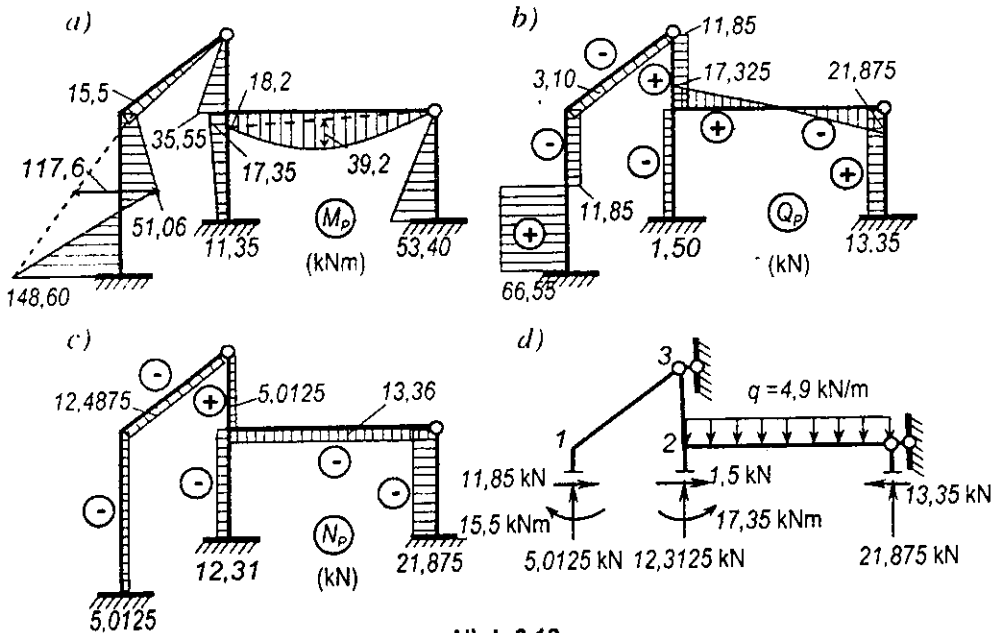
Sau khi thay giá trị  $q = 4,9 \text{ kN/m}$ , và giải hệ phương trình trên, ta được:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= 2,5833 \frac{l}{i} \text{ rad}; & Z_2 &= 4,7833 \frac{l}{i} \text{ rad}; \\
 Z_3 &= 35,1 \frac{l}{i} \text{ m}; & Z_4 &= 8,9 \frac{l}{i} \text{ m}.
 \end{aligned}$$

6) Vẽ các biểu đồ nội lực. Biểu đồ mômen uốn được xác định theo công thức:

$$(M_p) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + (\bar{M}_3)Z_3 + (\bar{M}_4)Z_4 + (M_p^0),$$

Kết quả tìm được như trên hình 6.13a.



Hình 6.13

Từ biểu đồ mômen uốn ta suy ra biểu đồ lực cắt theo nguyên tắc đã trình bày trong phương pháp lực. Kết quả như trên hình 6.13b. Từ biểu đồ lực cắt, lần lượt tách các nút theo thứ tự 1, 3, 2, 4 để khảo sát cân bằng, ta sẽ vẽ được biểu đồ lực dọc như trên hình 6.13c.

7) *Kiểm tra kết quả*: xét điều kiện cân bằng tại các nút, tiếp đó xét điều kiện cân bằng của một vài bộ phận nào đó của hệ.

Ví dụ, kiểm tra cân bằng của phần bên trên hệ bằng cách thực hiện mặt cắt ngang qua các tiết diện kê bên các nút 1, 2 và khớp 4 (hình 6.13d).

Ta có:

$$\sum X = 11,85 + 1,5 - 13,35 = 0;$$

$$\sum Y = 5,0125 + 12,3125 + 21,875 - 4,9.8 = 0;$$

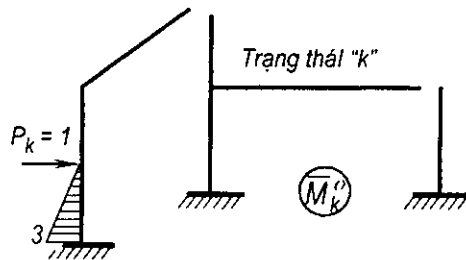
$$\sum M_2 = 5,0125.4 + 15,5 - 17,35 - 21,875.8 + 4,9.8.4 = 0.$$

Các điều kiện cân bằng đều được thỏa mãn.

8) *Xác định chuyển vị*:

Chuyển vị ngang tại khớp 4 chính là chuyển vị  $Z_4$  vừa tìm được ở trên, do đó  $x_4 = 8,9/i$  m (hướng về bên phải).

Để xác định chuyển vị ngang tại điểm đặt lực  $P$ , ta tạo trạng thái "k" trong hệ cơ bản tĩnh định bất kỳ của phương pháp lực như trên hình 6.14. Vẽ biểu đồ mômen uốn ở trạng thái "k" tiếp đó đem nhân với biểu đồ mômen uốn ( $M_P$ ) vừa tìm được ở trên (hình 6.13a). Kết quả:



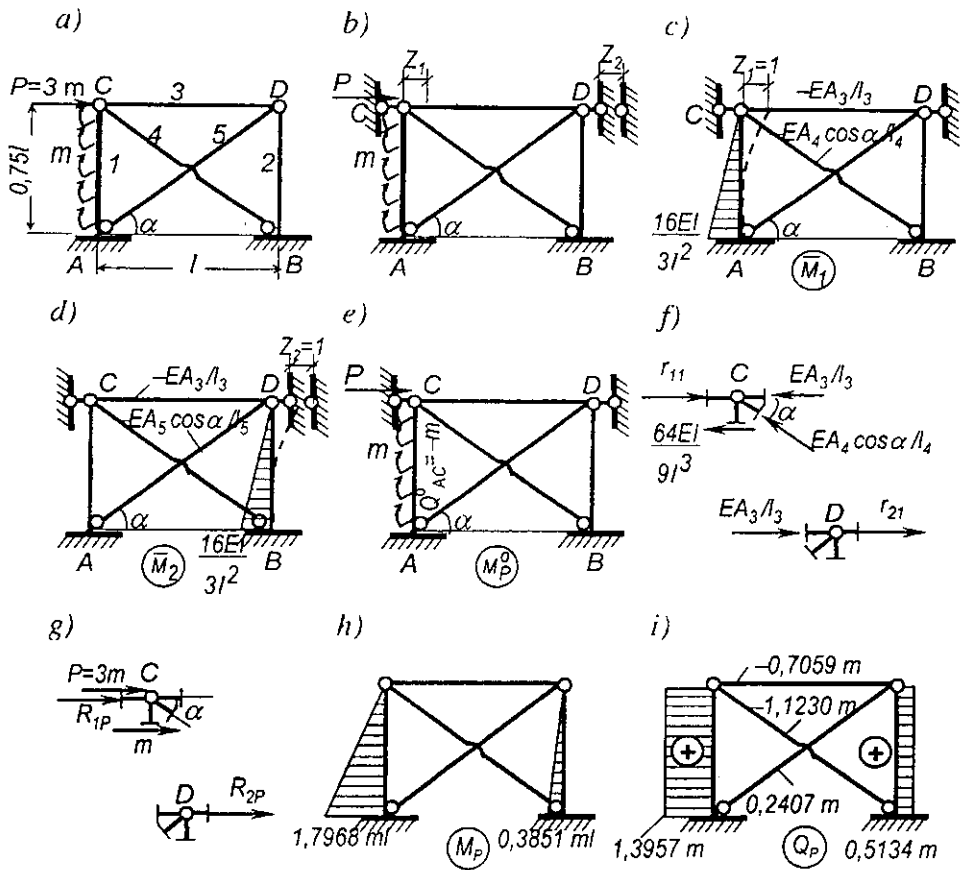
Hình 6.14

$$x_P = \frac{1}{EI} \left[ \frac{148,6.3}{2} . 2 - \frac{51,05.3}{2} . 1 \right] = \frac{20,5125}{i} \text{ m.}$$

**Ví dụ 6.2.** Xác định mômen uốn, lực cắt trong các thanh 1, 2 và lực dọc trong các thanh 3, 4, 5 của hệ chịu tải trọng với  $P=3m$  như trên hình 6.15a. Các thanh 1, 2 có độ cứng khi uốn là  $EI$ . Các thanh 3, 4, 5 có độ cứng khi kéo hoặc nén:

$$EA_3 = 8EI/3l^2; EA_4 = EA_5 = 125EI/24l^2.$$

Trong bài toán này, các thanh 3, 4, 5 chỉ chịu kéo hoặc nén cho nên cần xét đến ảnh hưởng của biến dạng dọc trục (chú ý là theo các giả thiết đã nêu ta chỉ được phép bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục so với ảnh hưởng của biến dạng uốn). Như vậy, hệ có bậc siêu động là 2. Hệ cơ bản như trên hình 6.15b, trong đó  $Z_1$  và  $Z_2$  là chuyển vị ngang tại C và D.



Hình 6.15

Để xác định nội lực do  $Z_1=1$  gây ra trong hệ cơ bản, ta cho khớp  $C$  chuyển vị ngang bằng đơn vị như trên hình 6.15c. Lúc này, khớp  $D$  không chuyển vị nên các thanh  $AD, BD$  không bị biến dạng và không phát sinh nội lực. Thanh  $AC$  có biến dạng uốn, nội lực trong thanh được xác định dễ dàng theo các số liệu cho trong bảng 6.2. Thanh  $CD$  chịu biến dạng nén bằng đơn vị, theo định luật Hooke lực dọc phát sinh trong thanh sẽ có giá trị là  $-EA_3/l_3 = -8EI/l_3^3$ . Thanh  $CB$  chịu biến dạng nén với giá trị bằng hình chiếu của chuyển vị ngang đơn vị lên phương  $CB$ , tức là bằng  $\cos\alpha = 4/5$ . Như vậy, trong thanh  $CB$  sẽ phát sinh lực dọc nén với giá trị bằng  $-(EA_4\cos\alpha)/l_4 = -10EI/l_3^3$ . Giá trị các nội lực tìm được ghi trên hình 6.15c.



Tương tự, khi cho  $Z_2$  chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị, ta xác định được các nội lực như đã ghi trên hình 6.15d.

Trong trường hợp này: tải trọng  $P$  đặt ngay tại khớp  $C$  nên không gây ra nội lực trong hệ cơ bản; mômen phân bố tuy không gây ra mômen uốn trong thanh  $AC$  (hình 6.15e) nhưng gây ra lực cắt  $Q_{AC}^o = -m$  (xem trong bảng 6.1).

Để xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc, ta lần lượt tách khớp  $C$  và khớp  $D$  tương ứng với từng trạng thái. Trên hình 6.15f, trình bày cách thực hiện để xác định  $r_{11}$  và  $r_{21}$ . Từ các phương trình cân bằng hình chiếu theo phương ngang, ta có:

$$r_{11} = \frac{64EI}{9l^3} + \frac{EA_3}{l_3} + \frac{EA_4}{l_4} \cos^2 \alpha = \frac{112EI}{9l^3}; \quad r_{21} = r_{12} = -\frac{EA_3}{l_3} = -\frac{8EI}{3l^3}.$$

Cũng thực hiện tương tự như vậy, ta sẽ xác định được:  $r_{22} = \frac{112EI}{9l^3}$ .

Để xác định các số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc, ta lần lượt tách khớp  $C$  và khớp  $D$  tương ứng với trạng thái hệ chịu tải trọng (hình 6.15e). Trên hình 6.15g, trình bày cách thực hiện để xác định  $R_{1P}$  và  $R_{2P}$ . Từ các phương trình cân bằng hình chiếu theo phương ngang, ta có:

$$R_{1P} = -P - m = -4m; \quad R_{2P} = 0.$$

Hệ phương trình chính tắc sau khi biến đổi có dạng:

$$14Z_1 - 3Z_2 - \frac{9ml^3}{2EI} = 0; \quad -3Z_1 + 14Z_2 = 0.$$

Sau khi giải hệ phương trình trên, ta được:

$$Z_1 = \frac{63ml^3}{187EI} = 0,3369 \frac{ml^3}{EI}; \quad Z_2 = \frac{27ml^3}{374EI} = 0,0722 \frac{ml^3}{EI}.$$

Biểu đồ mômen uốn và lực dọc trong thanh thứ  $j$  được xác định như sau:

$$(M_P) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2; \quad N_j = \bar{N}_{j1}Z_1 + \bar{N}_{j2}Z_2,$$

trong đó:  $\bar{N}_{j1}, \bar{N}_{j2}$  – lực dọc trong thanh thứ  $j$  do chuyển vị cưỡng bức  $Z_1$  và  $Z_2$  bằng đơn vị gây ra trong hệ cơ bản.

Kết quả tìm được như trên hình 6.15h và i.

Lực cắt trong thanh thứ  $j$  được xác định theo công thức (5.18) như sau:

$$Q_{AC} = 1,7968 \text{ ml} \cdot \frac{4}{31} - m = 1,3957 \text{ m};$$

$$Q_{BD} = 0,3851 \text{ ml} \cdot \frac{4}{31} = 0,5134 \text{ m}.$$

Kết quả vẽ biểu đồ lực cắt như trên hình 6.15i.

### 6.3. Cách xác định chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu thanh theo phương vuông góc với trục thanh trong hệ có các thanh đứng không song song

Khi tính hệ siêu động có ẩn là chuyển vị thẳng, ta cần cho nút chuyển vị thẳng bằng đơn vị để xác định nội lực trong hệ cơ bản và xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc. Ta xét hai trường hợp:

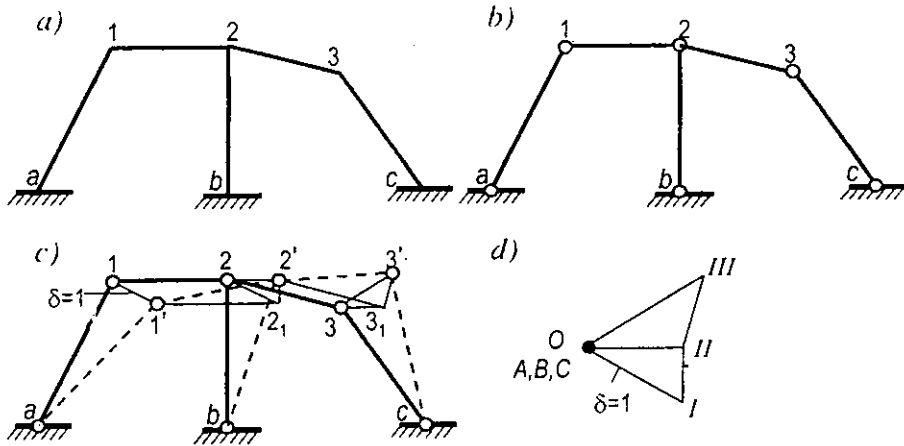
\* Khi không chấp nhận giả thiết *bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng đàn hồi dọc trục so với ảnh hưởng của biến dạng uốn*, thì tại mỗi nút có hai chuyển vị thẳng. Tuy số ẩn tăng lên song chuyển vị thẳng giữa các nút độc lập với nhau. Chuyển vị thẳng tại mỗi nút chỉ gây ảnh hưởng cục bộ và có thể dễ dàng vẽ được các biểu đồ đơn vị theo bảng mẫu 6.2 cho mọi phần tử.

\* Khi chấp nhận giả thiết *bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng đàn hồi dọc trục so với ảnh hưởng của biến dạng uốn*, thì số ẩn giảm xuống song chuyển vị thẳng giữa các nút có sự liên quan với nhau. Nói chung, khi một nút nào đó chuyển vị thẳng thì các nút khác cũng có chuyển vị thẳng kéo theo. Muốn vận dụng các số liệu cho trong bảng 6.2 để xác định nội lực ta cần biết giá trị của chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu mỗi thanh theo phương vuông góc với trục thanh.

Trong hệ có các thanh đứng song song, việc xác định những thành phần chuyển vị nói trên tương đối dễ dàng. Thật vậy, nếu bỏ qua biến dạng dọc trục của các thanh thì khi một nút nào đó chuyển vị thẳng, các thanh ngang sẽ chuyển vị tịnh tiến nên thành phần chuyển vị nói trên sẽ có giá trị bằng không, các thanh đứng trong phạm vi mỗi tầng sẽ có chuyển vị thẳng tương đối như nhau theo phương vuông góc với trục thanh.

Trong hệ có các thanh đứng không song song, nói chung thành phần chuyển vị thẳng nói trên tồn tại đối với cả thanh ngang và thanh đứng với giá trị khác nhau đối với mỗi thanh đứng. Do đó ta cần nghiên cứu cách xác định giá trị của thành phần chuyển vị này.

Để tìm hiểu cách xác định, ta xét hệ cho trên hình 6.16a. Giả sử gây chuyển vị cưỡng bức tại một nút nào đó của hệ, chẳng hạn nút  $l$  với giá trị  $\delta$  bằng đơn vị theo phương vuông góc với trục thanh  $a-l$ . Yêu cầu tìm thành phần chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu mỗi thanh, theo phương vuông góc với trục mỗi thanh đó.



Hình 6.16

Vì ở đây chỉ xét chuyển vị thẳng mà không xét đến chuyển vị xoay của các nút cho nên ta có thể thay thế hệ đã cho bằng hệ thanh khớp trong đó các nút và ngàm được thay bằng khớp như trên hình 6.16b. Nếu chú ý đến giả thiết 3 thì khi nghiên cứu chuyển vị thẳng, ta có thể xem các thanh là tuyệt đối cứng. Để xác định các thành phần chuyển vị cần tìm, trước tiên ta xác định chuyển vị của các nút. Trong trường hợp này, các điểm  $a, b, c$  (hình 6.16c) nối với trái đất nên chúng vẫn đứng yên trong quá trình hệ chuyển vị. Khi cho nút  $l$  chuyển vị đến vị trí mới là  $l'$ , thanh  $a-l$  sẽ có vị trí  $a-l'$ . Bây giờ cần tìm vị trí mới  $2'$  và  $3'$  của các nút 2 và 3.

Điểm 2 có liên quan đến các điểm  $l$  và  $b$  bằng các thanh  $2-l$  và  $2-b$ . Các điểm  $l$  và  $b$  có vị trí mới đã được xác định nên ta có thể xác định vị trí mới của 2 bằng hình học như sau: nếu giả thiết điểm 2 không bị ràng buộc bởi thanh  $2-b$  thì thanh  $l-2$  sẽ chuyển dời tịnh tiến tới  $l'-2_1$  do kết quả chuyển vị của thanh  $a-l$ , tiếp đó, vì điểm  $l'$  được giữ cố định tại vị trí mới nên điểm  $2_1$  chỉ có thể chuyển dời theo phương vuông góc với thanh  $l-2$  (chú ý là các chuyển vị được xem là nhỏ). Mặt khác, nếu lại giả thiết điểm 2 không bị ràng buộc bởi thanh  $l-2$  thì điểm 2 chỉ có thể chuyển dời so với điểm  $b$  theo phương vuông góc với thanh  $2-b$ . Nhưng điểm 2 bị ràng buộc

bởi cả hai thanh đó nên vị trí mới  $2'$  của điểm 2 chính là giao điểm của hai đường vuông góc với hai thanh  $b-2$  và  $l-2$  lần lượt kẻ từ 2 và  $2_1$ . Sau khi tìm được vị trí mới  $2'$  của 2, ta dễ dàng tìm được vị trí mới  $1'-2'$  và  $b'-2'$  của các thanh  $l-2$  và  $b-2$ , tiếp đó suy ra các thành phần chuyển vị cần tìm của thanh  $l-2$  và  $b-2$  lần lượt là các đoạn  $2_1-2'$  và  $2-2'$  trên hình 6.16c.

Biết vị trí mới của 2 và của  $c$  ta có thể tìm được vị trí mới  $3'$  của 3 theo lập luận tương tự như đã thực hiện đối với điểm 2. Vị trí mới  $3'$  của điểm 3 là giao điểm của hai đường vuông góc với hai thanh  $3-c$  và  $3-2$  lần lượt kẻ từ 3 và  $3_1$ . Thành phần chuyển vị cần tìm của các thanh  $3-c$  và  $2-3$  lần lượt là các đoạn  $3-3'$  và  $3_1-3'$  trên hình 6.16c.

Từ những nhận xét trên, ta có thể thực hiện đơn giản hơn bằng cách sử dụng *sơ đồ chuyển vị* như sau (hình 6.16d):

Chọn điểm bất kỳ  $O$  làm điểm tượng trưng cho các điểm không chuyển vị, các điểm tượng trưng cho chuyển vị của các điểm  $a, b, c$  là  $A, B, C$  trùng với điểm  $O$ . Với một tỷ lệ xích nào đó, từ  $A$  kẻ đoạn  $AI = l$  theo phương vuông góc với thanh  $a-l$ . Như vậy, đoạn  $AI$  biểu thị chuyển vị tương đối giữa hai đầu thanh  $a-l$  theo phương vuông góc với trục thanh  $a-l$ .

Để tìm điểm  $II$  tượng trưng cho chuyển vị của điểm 2 trên sơ đồ chuyển vị, ta thực hiện như sau: điểm 2 thuộc thanh  $l-2$  nên điểm tượng trưng  $II$  tương ứng trên sơ đồ chuyển vị nằm trên đường  $I-II$  vuông góc với thanh  $l-2$ ; mặt khác, điểm 2 còn thuộc thanh  $b-2$  nên điểm tượng trưng  $II$  còn nằm trên đường  $B-II$  vuông góc với thanh  $b-2$ . Trên sơ đồ chuyển vị, các đoạn  $B-II$  và  $I-II$  lần lượt biểu thị chuyển vị tương đối giữa các đầu thanh  $b-2$  và  $l-2$  theo phương vuông góc với trục thanh. Tam giác  $B-II-I$  và tam giác  $2-2'-2_1$  đồng dạng nên đoạn  $B-II$  tỷ lệ với đoạn  $2-2'$ ; đoạn  $I-II$  tỷ lệ với đoạn  $2_1-2'$  theo tỷ lệ tương ứng với tỷ lệ xích đã chọn để vẽ sơ đồ chuyển vị.

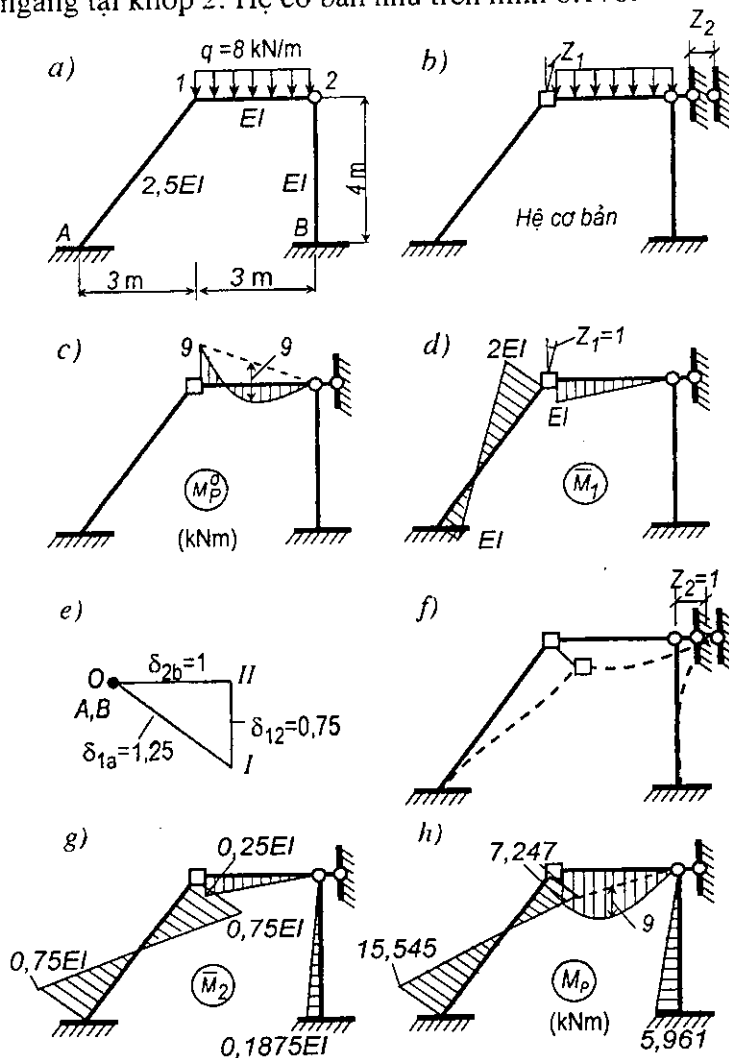
Tiếp tục thực hiện tương tự như vậy ta sẽ tìm được điểm tượng trưng  $III$  của điểm 3 là giao điểm của đường  $II-III$  vuông góc với thanh  $2-3$  và đường  $C-III$  vuông góc với thanh  $c-3$ . Các tam giác  $C-II-III$  và  $3-3_1-3'$  đồng dạng nên các đoạn  $C-III$  và  $II-III$  tỷ lệ với các đoạn  $3-3'$  và  $3_1-3'$  đồng thời biểu thị chuyển vị tương đối giữa các đầu thanh  $c-3$  và  $2-3$  theo phương vuông góc với trục thanh.

Như vậy, muốn tìm chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu thanh theo phương vuông góc với trục thanh ta cần vẽ sơ đồ chuyển vị, đoạn thẳng nối

hai điểm bất kỳ  $IK$  nào đó trên sơ đồ chuyển vị sẽ biểu thị chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu thanh  $ik$  theo phương vuông góc với trục thanh  $ik$  tương ứng. Để xác định độ dài  $IK$  ta đo trực tiếp trên sơ đồ chuyển vị theo tỷ lệ xích đã chọn hoặc giải các tam giác theo các góc, cạnh đã biết trên sơ đồ chuyển vị.

**Ví dụ 6.3.** Vẽ biểu đồ mômen uốn trong hệ siêu động cho trên hình 6.17a.

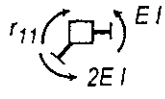
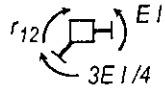
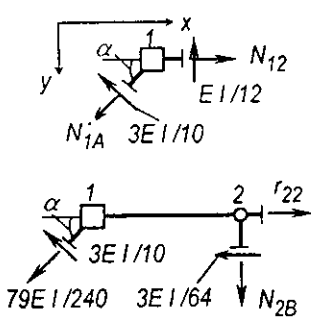
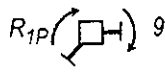
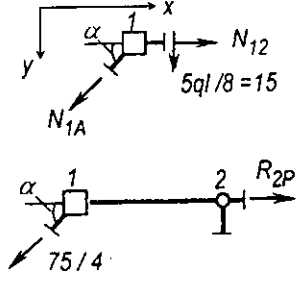
Hệ có hai ẩn: một chuyển vị xoay tại nút 1 và một chuyển vị thẳng theo phương ngang tại khớp 2. Hệ cơ bản như trên hình 6.17b.



Hình 6.17

Biểu đồ  $M_p^o$  (hình 6.17c) do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản và biểu đồ  $\bar{M}_l$  (hình 6.17d) do chuyển vị xoay  $Z_l = l$  gây ra trong hệ cơ bản tìm được dễ dàng theo các số liệu cho trong bảng 6.1 và 6.2.

**Bảng 6.3**

Đại lượng	Biểu đồ	Bộ phận tách	Phương trình cân bằng	Kết quả
$r_{11}$	$\bar{M}_1$		$\sum M = r_{11} - EI - 2EI = 0$	$3EI$
$r_{12} = r_{21}$	$\bar{M}_2$		$\sum M = r_{12} - \frac{1}{4}EI + \frac{3}{4}EI = 0$	$-\frac{EI}{2}$
$r_{22}$	$\bar{M}_2$		$\sum Y = N_{1A} \sin \alpha - \frac{3EI}{10} \cos \alpha - \frac{EI}{12} = 0$ <p>Suy ra <math>N_{1A} = \frac{79EI}{240}</math></p> $\sum X = r_{22} - \frac{3EI}{64} - \frac{79EI}{240} \cos \alpha - \frac{3EI}{10} \sin \alpha = 0$	$\frac{31EI}{64}$
$R_{1P}$	$M_p^o$		$\sum M = R_{1P} + 9 = 0$	$-9$
$R_{2P}$	$M_p^o$		$\sum Y = N_{1A} \sin \alpha + 15 = 0$ <p>Suy ra <math>N_{1A} = -\frac{15}{\sin \alpha} = -\frac{75}{4}</math></p> $\sum X = R_{2P} + \frac{75}{4} \cos \alpha = 0$	$-\frac{45}{4}$

Để vẽ biểu đồ  $\bar{M}_2$  do chuyển vị thẳng  $Z_2 = 1$  gây ra trong hệ cơ bản ta cần vẽ sơ đồ chuyển vị. Chọn điểm  $O$  bất kỳ, tượng trưng cho tất cả các điểm bất động (hình 6.17e), các điểm  $A, B$  sẽ trùng với  $O$ . Từ  $O$  dựng đoạn  $O-II = \delta_{2b} = 1$  theo phương vuông góc với thanh  $2-B$  ta được điểm tượng trưng  $II$  của điểm 2. Điểm tượng trưng  $I$  chính là giao điểm của đường  $O-I$  vuông góc với thanh  $a-1$  và đường  $II-I$  kẻ từ  $II$  vuông góc với thanh  $1-2$ . Từ sơ đồ chuyển vị ta xác định chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu các thanh và được kết quả như sau:

$$\delta_{2b} = B-II = 1; \quad \delta_{12} = I-II = 0,75; \quad \delta_{1a} = A-I = 1,25.$$

Sơ đồ biến dạng tương ứng của hệ như trên hình 6.17f. Vận dụng bảng 6.2 đồng thời căn cứ vào các số liệu vừa tìm được và đường biến dạng của các thanh ta vẽ được biểu đồ  $\bar{M}_2$  như trên hình 6.17g.

Quá trình xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc được trình bày trong bảng 6.3.

Hệ phương trình chính tắc:

$$3EIZ_1 - \frac{1}{2}EIZ_2 - 9 = 0; \quad -\frac{1}{2}EIZ_1 + \frac{31}{64}EIZ_2 - \frac{45}{4} = 0.$$

Sau khi giải hệ phương trình trên, ta được:  $Z_1 = \frac{639}{77EI}$  rad;  $Z_2 = \frac{2448}{77EI}$  m.

Biểu đồ mômen uốn tổng cộng được xác định theo công thức:

$$(M_P) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + (M_P^0).$$

Kết quả tìm được như trên hình 6.17h.

## 6.4. Cách tính hệ siêu động chịu chuyển vị cưỡng bức, biến dạng vì nhiệt và do chế tạo không chính xác

Về cơ bản, cách tính hệ siêu động chịu tác dụng của chuyển vị cưỡng bức tại các liên kết tựa, sự thay đổi nhiệt độ và do chế tạo chiều dài của các thanh không chính xác hoặc do điều chỉnh chiều dài các thanh, cũng tương tự như trong bài toán hệ chịu tải trọng bất động đã xét.

Khi giải bài toán này ta cũng thực hiện trên hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị như đã trình bày trong mục 6.2. Để đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống hệ đã cho ta cần gây ra các chuyển vị cưỡng bức  $Z$  tại các liên kết đặt thêm vào hệ với các giá trị sao cho phản lực trong các liên kết đặt thêm vào hệ do tất cả các nguyên nhân gây ra trong hệ cơ bản phải bằng không.

Nếu biểu thị chung các nguyên nhân bằng ký tự  $H$ , thì trong trường hợp này hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\begin{aligned} r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \dots + r_{kk}Z_k + \dots + r_{kn}Z_n + R_{kH} = 0, \\ \text{với } k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Các hệ số  $r_{ki}$  vẫn có ý nghĩa là phản lực trong liên kết thứ  $k$  đặt thêm vào hệ do chuyển vị cưỡng bức  $Z_i=1$  gây ra trong hệ cơ bản, xác định như đã trình bày trong mục 6.2.

Các số hạng tự do  $R_{kH}$  biểu thị phản lực trong liên kết thứ  $k$  đặt thêm vào hệ do nguyên nhân  $H$  gây ra trong hệ cơ bản. Nguyên nhân  $H$  có thể là chuyển vị cưỡng bức tại các liên kết tựa, sự thay đổi nhiệt độ hoặc chế tạo chiều dài của các thanh không chính xác. Đó là những đại lượng mới đề cập, dưới đây ta sẽ tìm hiểu cách xác định chúng.

Sau khi thiết lập và giải hệ phương trình chính tắc để tìm các  $Z_i$ , cũng tương tự như ở 6.2, ta xác định nội lực trong hệ siêu động đã cho theo công thức:

$$(S_H) = (\bar{S}_1)Z_1 + (\bar{S}_2)Z_2 + \dots + (\bar{S}_k)Z_k + \dots + (\bar{S}_n)Z_n + (S_H^o), \quad (6.6)$$

trong đó:

$(\bar{S}_k)$  – biểu đồ nội lực do riêng chuyển vị cưỡng bức  $Z_k=1$  gây trong hệ cơ bản (cách tìm biểu đồ này đã được trình bày trong mục 6.2);

$(S_H)$  – biểu đồ nội lực do nguyên nhân  $H$  gây ra trong hệ siêu động;

$(S_H^o)$  – biểu đồ nội lực do nguyên nhân  $H$  gây ra trong hệ cơ bản.

Để tìm chuyển vị trong hệ siêu động ta cũng thực hiện theo một trong ba biện pháp như đã trình bày trong mục 6.2.

Ta thấy có hai vấn đề mới cần giải quyết là xác định các phản lực  $R_{kH}$  và vẽ biểu đồ  $(S_H^o)$ , chủ yếu là biểu đồ mômen uốn  $(M_H^o)$ . Nếu biểu đồ  $(M_H^o)$  đã tìm được thì ta sẽ vận dụng các điều kiện cân bằng để xác định các  $R_{kH}$  như đã biết trong mục 6.2. Như vậy, vấn đề duy nhất cần tiếp tục tìm hiểu là vẽ biểu đồ  $(M_H^o)$ .

#### **A. Cách tìm biểu đồ $M_H^o$ do chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa gây ra trong hệ cơ bản**

Để giải bài toán được đơn giản ta nên phân tích chuyển vị cưỡng bức



thành hai thành phần: chuyển vị xoay và chuyển vị thẳng. Theo nguyên lý cộng tác dụng, ta có thể biểu thị:

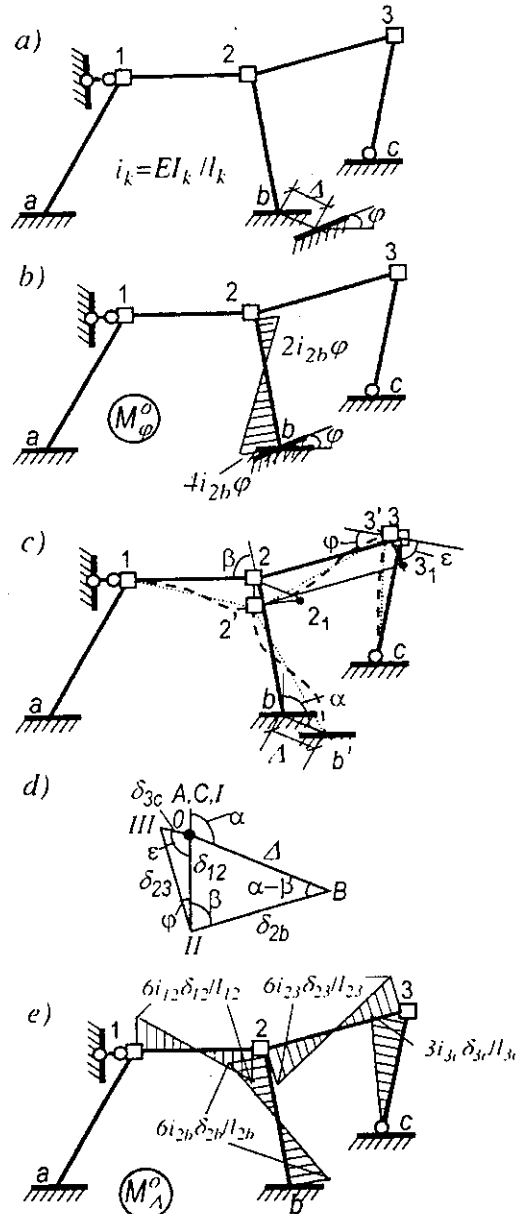
$$(M_H^o) = (M_\varphi^o) + (M_\Delta^o), \quad (6.7)$$

trong đó:

$(M_\varphi^o)$  – biểu đồ mômen uốn do riêng các thành phần chuyển vị xoay cưỡng bức gây ra trong hệ cơ bản. Vận dụng các số liệu cho trong bảng 6.2 ta dễ dàng vẽ được biểu đồ này;

$(M_\Delta^o)$  – biểu đồ mômen uốn do riêng các thành phần chuyển vị thẳng cưỡng bức gây ra trong hệ cơ bản. Nếu thừa nhận giả thiết thứ ba thì chuyển vị thẳng tại các gối tựa thường gây ra chuyển vị thẳng với các giá trị khác nhau tại các nút có liên quan. Do đó, để vẽ biểu đồ này ta cần vẽ sơ đồ chuyển vị nhằm xác định các chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu các thanh theo phương vuông góc với trục thanh (xem 6.3). Tiếp đó vận dụng các số liệu trong bảng 6.2 để vẽ biểu đồ.

Trên hình 6.18 trình bày cách tìm các biểu đồ  $(M_\varphi^o)$  và  $(M_\Delta^o)$  trong hệ cơ bản chịu chuyển vị cưỡng bức như trên hình 6.18a.



Hình 6.18

Để xác định  $R_{kH}$  ta cũng phân tích đại lượng này thành hai thành phần tương ứng với hai nguyên nhân nói trên

$$R_{kH} = R_{k\varphi} + R_{k\Delta},$$

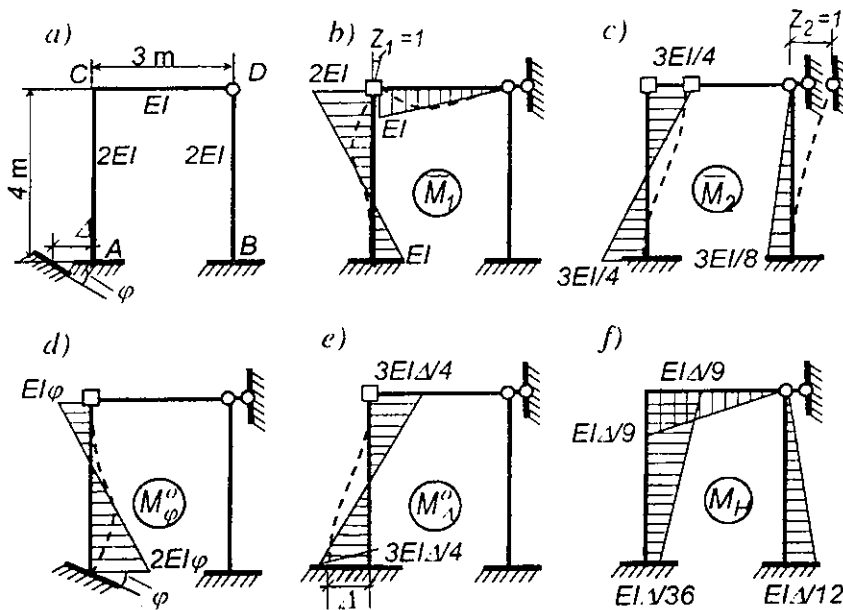
trong đó:

$R_{k\varphi}$  - phản lực tại liên kết thứ  $k$  đặt thêm vào hệ do các thành phần chuyển vị xoay cưỡng bức gây ra trong hệ cơ bản;

$R_{k\Delta}$  - phản lực tại liên kết thứ  $k$  đặt vào hệ do các thành phần chuyển vị thẳng cưỡng bức gây ra trong hệ cơ bản.

Những thành phần này được xác định theo các số liệu tương ứng trên các biểu đồ ( $M_{\varphi}^o$ ) và ( $M_{\Delta}^o$ ).

**Ví dụ 6.4.** Vẽ biểu đồ mômen uốn cho hệ trên hình 6.19a.



Hình 6.19

Hệ có hai ẩn. Các biểu đồ mômen uốn do các chuyển vị cưỡng bức  $Z_1$  và  $Z_2$  bằng đơn vị gây ra trên hệ cơ bản như trên hình 6.19b, c. Các biểu đồ mômen uốn do các thành phần chuyển vị xoay và chuyển vị thẳng tại ngàm, tìm được như trên hình 6.19d, e. Các hệ số và số hạng tự do tìm được như sau:

$$r_{11} = 3EI; \quad r_{21} = r_{12} = -\frac{3}{4}EI; \quad r_{22} = \frac{15}{32}EI;$$

$$R_{1H} = EI\varphi - \frac{3}{4}EI\Delta = -\frac{1}{2}EI\Delta; \quad R_{2H} = -\frac{3}{4}EI\varphi + \frac{3}{8}EI\Delta = \frac{3}{16}EI\Delta.$$

Hệ phương trình chính tắc:

$$3Z_1 - \frac{3}{4}Z_2 - \frac{1}{2}\Delta = 0; \quad -\frac{3}{4}Z_1 + \frac{15}{32}Z_2 + \frac{3}{16}\Delta = 0.$$

Sau khi giải hệ phương trình, ta được:  $Z_1 = (\Delta/9)$  rad;  $Z_2 = -(2\Delta/9)$  m.

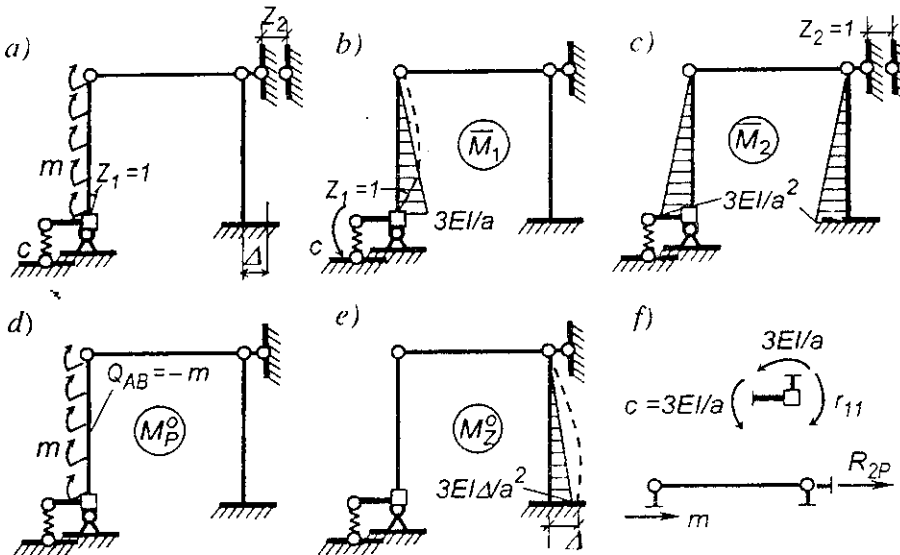
Biểu đồ mômen uốn tổng cộng được xác định theo công thức:

$$(M_H) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + (M_\varphi^0) + (M_\Delta^0),$$

Kết quả tìm được như trên hình 6.19f.

**Ví dụ 6.5.** Vận dụng phương pháp chuyển vị, vẽ biểu đồ mômen uốn cho hệ chịu tác dụng của các nguyên nhân đã xét trong ví dụ 5.9 (hình 5.28a).

Hệ đã cho có hai ẩn. Lập hệ cơ bản bằng cách đặt thêm liên kết mômen tại nút A và liên kết lực theo phương ngang tại khớp C như trên hình 6.20a.



Hình 6.20

Hệ phương trình chính tắc:  $r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} + R_{1Z} = 0;$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} + R_{2Z} = 0.$$

Các biểu đồ mômen uốn lần lượt do  $Z_1 = 1$ ,  $Z_2 = 1$ , do tải trọng và do chuyển vị cưỡng bức gây ra trong hệ cơ bản như trên hình 5.20b, c, d, e.

Chú ý là mômen phân bố đều không gây ra mômen uốn trong hệ cơ bản (xem bảng 6.1) nhưng gây ra lực cắt trong thanh  $AB$  với giá trị bằng  $-m$ .

Các hệ số và số hạng tự do được xác định từ điều kiện cân bằng mômen tại nút  $A$  và điều kiện cân bằng lực của thanh  $BC$  được tách ra. Khi xác định  $r_{11}$  cần chú ý xét đến phản lực trong ngàm đàn hồi (xem hình 6.20f). Khi xác định  $R_{2P}$  cần chú ý xét đến lực cắt trong thanh  $AB$  do mômen phân bố đều gây ra (xem hình 6.20f). Kết quả:

$$r_{11} = \frac{6EI}{a}; \quad r_{12} = r_{21} = -\frac{3EI}{a^2}; \quad r_{22} = \frac{6EI}{a^3};$$

$$R_{1P} = 0; \quad R_{1Z} = 0; \quad R_{2P} = -m; \quad R_{2Z} = -0,5m.$$

Thay các kết quả vào hệ phương trình chính tắc, sau khi giải ta được:

$$Z_1 = \frac{ma^2}{6EI}; \quad Z_2 = \frac{ma^3}{3EI}.$$

Vẽ biểu đồ mômen uốn theo biểu thức:

$$(M) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + (M_P^o) + (M_Z^o).$$

Kết quả tìm được giống như kết quả trên hình 5.28e đã thực hiện trong phương pháp lực.

### **B. Cách tìm biểu đồ $M_H^o$ do biến dạng vì nhiệt và chế tạo không chính xác gây ra trong hệ cơ bản**

Tương tự như trên, ta phân tích độ biến thiên nhiệt độ thành hai thành phần:

- ❖ Thành phần biểu thị độ chênh lệch nhiệt độ giữa thớ dưới và thớ trên trong phạm vi mỗi thanh, được đặc trưng bởi  $\Delta t = t_2 - t_1$ .
- ❖ Thành phần biểu thị sự thay đổi đều của nhiệt độ trong phạm vi mỗi thanh được đặc trưng bằng  $t_c$  (sự thay đổi nhiệt độ ở trục cấu kiện).

Theo nguyên lý cộng tác dụng, ta có:

$$(M_H^o) = (M_{\Delta t}^o) + (M_{t_c}^o), \quad (6.8)$$

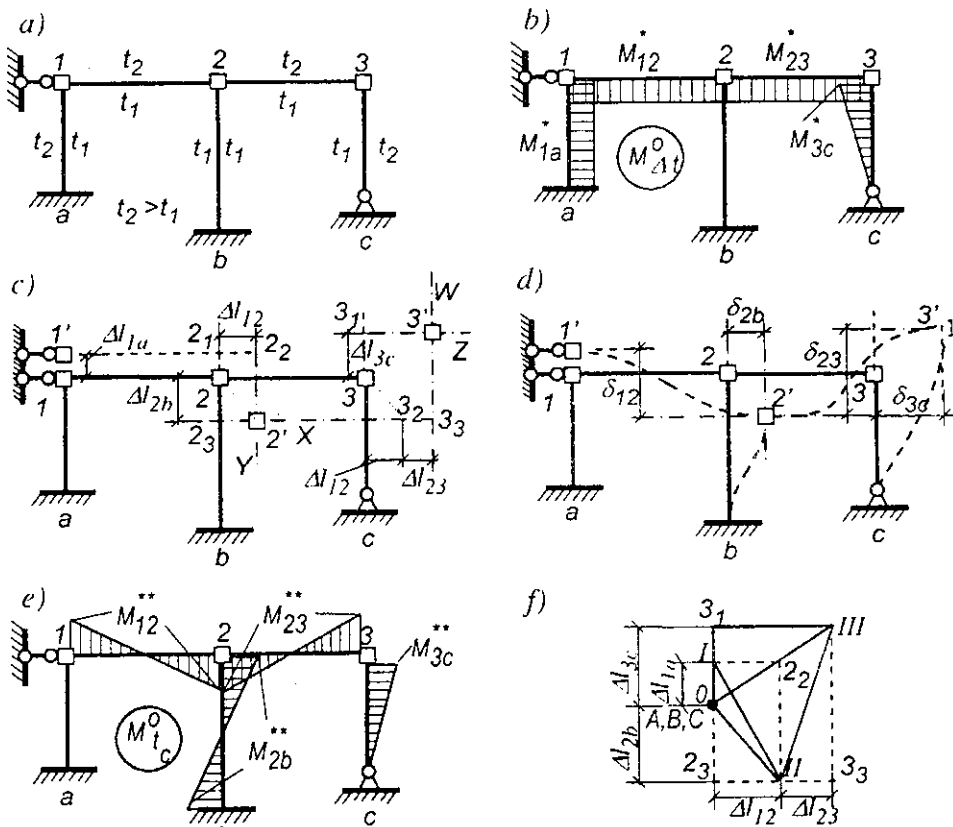
trong đó:

$(M_{\Delta t}^o)$  – biểu đồ mômen uốn do các thành phần  $\Delta t$  gây ra trong hệ cơ bản. Sự chênh lệch nhiệt độ  $\Delta t$  chỉ làm cho các thanh bị uốn cong mà không gây ra sự thay đổi chiều dài của các thanh. Do đó, các nút sẽ không có chuyển vị thẳng. Thành phần này chỉ gây ảnh

hường cục bộ trong phạm vi mỗi thanh. Vận dụng các số liệu trong bảng 6.1 ta dễ dàng vẽ được biểu đồ này. Khi vận dụng cần chú ý là các thơ căng của biểu đồ mômen uốn luôn luôn ở phía nhiệt độ thay đổi thấp hơn.

( $M_{t_c}^0$ ) – biểu đồ mômen uốn do các thành phần  $t_c$  gây ra trong hệ cơ bản.

Thành phần này gây ra biến dạng dọc trục trong các thanh, do đó, nói chung các nút sẽ có chuyển vị thẳng. Sự thay đổi vị trí của các nút sẽ gây ra mômen uốn trong các thanh của hệ cơ bản. Như vậy, để vẽ được biểu đồ này, ta cần giải bài toán xác định chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu các thanh theo phương vuông góc với trục thanh, tức là tìm sơ đồ chuyển vị của hệ.



Hình 6.21

Ta sẽ tìm hiểu cách vẽ các biểu đồ đó qua hệ cơ bản trên hình 6.21a.

★ Biểu đồ  $M_{\Delta t}^0$ : Vận dụng các số liệu trong bảng 6.1 ta vẽ được biểu đồ

có dạng như trên hình 6.21b. Các thứ căng của biểu đồ mômen uốn luôn luôn ở phía nhiệt độ thấp, đối thấp hơn (phía  $t_1$ ). Các tung độ có giá trị như sau:

$$M_{12}^* = \frac{\alpha}{h_{12}} (t_2 - t_1) EI_{12}; \quad M_{23}^* = \frac{\alpha}{h_{23}} (t_2 - t_1) EI_{23};$$

$$M_{1a}^* = \frac{\alpha}{h_{1a}} (t_2 - t_1) EI_{1a}; \quad M_{3c}^* = \frac{3\alpha}{2h_{23}} (t_2 - t_1) EI_{3c}.$$

✦ *Biểu đồ  $M_{1c}^0$ :*

Gọi  $t_{c,jk}$  là độ biến thiên nhiệt độ ở trục thanh  $ik$ . Thanh  $ik$  có biến dạng dọc trục vì nhiệt là

$$\Delta l_{ik} = \alpha t_{c,jk} l_{ik},$$

với  $l_{ik}$  là chiều dài của thanh  $ik$ ;  $\alpha$  là hệ số giãn nở dài vì nhiệt.

- *Tìm vị trí mới của nút 1:* Ta thấy các điểm  $a, b, c$  nối với trái đất nên không di chuyển. Nút 1 chỉ có thể di chuyển theo phương đứng vì bị liên kết thanh ngăn cản chuyển vị ngang. Dưới ảnh hưởng của nhiệt độ, thanh  $a-1$  sẽ giãn dài một đoạn  $\Delta l_{1a} = \alpha t_{c,1a} l_{1a}$  và đẩy nút 1 đến vị trí  $1'$  (hình 6.21c).
- *Tìm vị trí mới của nút 2:* Giả sử dưới tác dụng của nhiệt độ, thanh  $1-2$  sẽ giãn dài một đoạn  $\Delta l_{12} = \alpha t_{c,12} l_{12}$  còn thanh  $b-2$  co ngắn (giả thiết  $t_1 < 0$ ) một đoạn  $\Delta l_{2b} = \alpha t_{c,2b} l_{2b}$ . Nếu xem nút 2 thuộc thanh  $1-2$  thì nút 2 sẽ có vị trí nằm trên trục  $Y$  đi qua  $2_2$  và vuông góc với thanh  $1-2$  để bảo đảm điều kiện trục thanh  $1-2$  giãn dài một đoạn  $\Delta l_{12}$ . Nếu xem nút 2 thuộc thanh  $b-2$  thì nút 2 sẽ phải có vị trí mới nằm trên trục  $X$  vuông góc với thanh  $b-2$  để đảm bảo điều kiện trục thanh  $b-2$  co ngắn một đoạn  $\Delta l_{2b}$ . Như vậy, vị trí mới  $2'$  của nút 2 đồng thời phải nằm trên trục  $X$  và trục  $Y$  tức là ở giao điểm của hai trục đó.
- *Tìm vị trí mới của nút 3:* Dưới tác dụng của nhiệt độ, giả sử thanh  $3-c$  giãn dài một đoạn  $\Delta l_{3c} = \alpha t_{c,3c} l_{3c}$  và thanh  $2-3$  giãn dài một đoạn  $\Delta l_{23} = \alpha t_{c,23} l_{23}$ . Nếu xem nút 3 thuộc thanh  $3-c$  thì sau khi thanh  $3-c$  giãn dài tới vị trí  $3_1$ , nút 3 sẽ rời khỏi vị trí  $3_1$  chuyển vị theo phương  $Z$  vuông góc với thanh  $3-c$ . Nếu xem nút 3 thuộc thanh  $2-3$  thì nút 3 sẽ chuyển dịch theo nút 2 tới  $3_2$  đồng thời chuyển dịch tới  $3_3$  do kết quả biến dạng dọc trục của thanh  $2-3$ , tiếp đó có thể chuyển dịch theo

phương  $W$  vuông góc với thanh 2-3. Như vậy, vị trí mới  $3'$  của nút 3 chính là giao điểm của hai trục  $Z$  và  $W$ .

Nếu chú ý là các nút không cho phép các đầu thanh có chuyển vị xoay, ta có thể vẽ được đường biến dạng của các thanh tương ứng như trên hình 6.21d. Từ các hình 6.21c, d ta có thể xác định các chuyển vị thẳng tương đối  $\delta_{ik}$  giữa hai đầu các thanh  $ik$  theo phương vuông góc với trục thanh như sau:

$$\begin{aligned} \delta_{a1} &= 0; & \delta_{12} &= \Delta l_{1a} + \Delta l_{2b}; & \delta_{2b} &= \Delta l_{12}; \\ \delta_{23} &= \Delta l_{2b} + \Delta l_{3c}; & \delta_{3c} &= \Delta l_{23} + \Delta l_{12}. \end{aligned}$$

Tiếp đó, vận dụng các số liệu trong bảng 6.2 ta sẽ vẽ được biểu đồ ( $M_{lc}^o$ ) như trên hình 6.21e. Các tung độ có giá trị như sau:

$$\begin{aligned} M_{12}^{**} &= \frac{6EI_{12}}{l_{12}^2} \delta_{12}; & M_{23}^{**} &= \frac{6EI_{23}}{l_{23}^2} \delta_{23}; \\ M_{2b}^{**} &= \frac{6EI_{2b}}{l_{2b}^2} \delta_{2b}; & M_{3c}^{**} &= \frac{3EI_{3c}}{l_{3c}^2} \delta_{3c}. \end{aligned}$$

Cũng có thể xác định chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu các thanh theo phương vuông góc với trục thanh bằng cách dựng sơ đồ chuyển vị tương tự như đã trình bày trong mục 6.3. Tuy nhiên, trong trường hợp bài toán nhiệt độ ta cần phải chú ý bổ sung biến dạng dọc trục vì nhiệt của bản thân mỗi thanh. Sơ đồ chuyển vị vẽ cho bài toán hệ chịu sự thay đổi nhiệt độ được gọi là *giản đồ Williot*. Ta sẽ tìm hiểu cách vẽ giản đồ Williot thông qua ví dụ vừa khảo sát ở trên.

Chọn điểm bất kỳ  $O$  tượng trưng cho các điểm bất động. Trên giản đồ các điểm  $A, B, C$  tượng trưng cho chuyển vị của các điểm bất động  $a, b, c$  sẽ trùng với điểm  $O$ .

Để tìm điểm  $I$  tượng trưng cho chuyển vị của nút 1, ta nhận thấy nút 1 chỉ có thể chuyển vị theo phương song song với thanh  $a-1$  một đoạn bằng  $\Delta l_{1a}$  cho nên trên giản đồ ta kẻ đoạn  $AI$  song song với thanh  $a-1$  và bằng  $\Delta l_{1a}$ .

Để tìm điểm  $II$  tượng trưng cho chuyển vị của nút 2, ta có nhận xét sau: nút 2 có liên quan với nút 1 qua thanh 1-2 cho nên vị trí của nó phụ thuộc vị trí của nút 1. Sau khi biết điểm  $I$ , từ  $I$  ta kẻ đoạn  $I-2_2$  song song với thanh 1-2 có giá trị bằng độ dãn  $\Delta l_{12}$  của thanh 1-2. Ngoài ra điểm 2 còn

thuộc thanh  $b-2$  nên vị trí của điểm 2 phải phụ thuộc vị trí điểm  $B$ , do đó từ  $B$  ta kẻ đoạn  $B-2_3$  song song với thanh  $b-2$  có giá trị bằng độ co ngắn  $\Delta l_{2b}$  của thanh  $b-2$ . Như vậy, vị trí  $II$  biểu thị chuyển vị của nút 2 là giao điểm của hai đường: đường  $2_2-II$  kẻ từ  $2_2$  vuông góc với thanh  $1-2$  và đường  $2_3-II$  kẻ từ  $2_3$  vuông góc với thanh  $b-2$ .

Cũng thực hiện tương tự như thế ta sẽ xác định được điểm tượng trưng  $III$  của điểm 3 trên giản đồ.

Các vectơ  $A-I$ ;  $I-II$ ;  $II-III$  v.v... trên giản đồ cho ta biết phương và trị số của chuyển vị tương đối giữa các điểm nối vectơ  $A-I$ ,  $I-II$ ,  $II-III$  v.v... Muốn tìm thành phần chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh ta cần chiếu các vectơ tương ứng xuống phương cần tìm như đã thể hiện trên hình 6.21f.

Để xác định  $R_{kH}$  ta cũng phân tích đại lượng này thành hai thành phần tương ứng với hai nguyên nhân nói trên:

$$R_{kH} = R_{k\Delta t} + R_{kt_c}$$

Những thành phần này được xác định theo các số liệu tương ứng trên các biểu đồ  $(M_{\Delta t}^o)$  và  $(M_{t_c}^o)$ .

Bài toán hệ có các thanh chế tạo chiều dài không chính xác hoặc điều chỉnh chiều dài được quy đổi về bài toán hệ chịu sự thay đổi nhiệt độ tương đương. Ví dụ, khi chế tạo không chính xác thanh  $ik$  có chiều dài  $l_{ik}$  với độ dôi  $\delta_{ik}$  hoặc khi điều chỉnh chiều dài thanh với chiều dài lớn hơn là  $\delta_{ik}$  ta có thể xem như thanh chịu sự thay đổi đều của nhiệt độ ở trục là  $t_{c,jk}$  được xác định theo hệ thức:

$$\delta_{ik} = \alpha t_{c,jk} l_{ik}$$

**Ví dụ 6.6.** Vẽ biểu đồ mômen uốn trong hệ đã xét ở ví dụ 6.4 (hình 6.19a) khi hệ chịu tác dụng đồng thời của hai nguyên nhân:

- Nhiệt độ ở bên trong khung và bên ngoài khung thay đổi theo thứ tự là  $4t$  và  $2t$ . Cho biết  $h = const = 0,4$  m.
- Khi chế tạo, thanh ngang có độ dôi là  $\delta = 3\alpha t$ .

Hệ có hai ẩn. Các biểu đồ mômen uốn do các chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị gây ra trong hệ cơ bản, các hệ số của hệ phương trình chính tắc đã được xác định trong ví dụ 6.4.

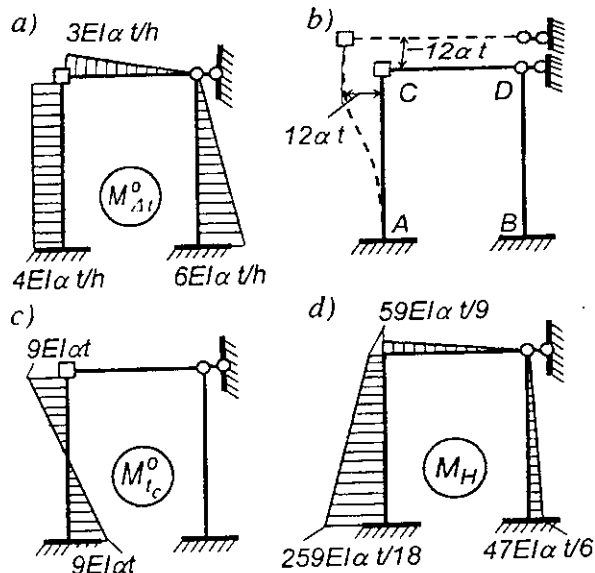
Ở đây ta chỉ cần tìm bổ sung:



• Biểu đồ mômen uốn do sự chênh lệch nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản, vận dụng các số liệu trong bảng 6.1 sẽ được kết quả như trên hình 6.22a;

• Biểu đồ mômen uốn do sự thay đổi đều của nhiệt độ và do thanh ngang chế tạo không chính xác gây ra trong hệ cơ bản. Biến dạng của các thanh:

$$\begin{aligned} \Delta l_{AC} &= \Delta l_{BD} = \\ &= \alpha_{c,AC} l_{AC} = \\ &= \alpha \cdot 3t \cdot 4 = 12\alpha t; \\ \Delta l_{CD} &= \alpha_{c,CD} l_{CD} + \delta \\ &= \alpha \cdot 3t \cdot 3 + 3\alpha t = \\ &= 12\alpha t; \end{aligned}$$



Hình 6.22

Chuyển vị tương đối giữa hai đầu các thanh theo phương vuông góc với trục thanh tìm được như trên hình 6.22b. Vận dụng các số liệu trong bảng 6.2 sẽ vẽ được biểu đồ mômen như trên hình 6.22c.

Các hệ số của hệ phương trình chính tắc đã được xác định trong ví dụ 6.4. Các số hạng tự do:

$$\begin{aligned} R_{1H} &= -\frac{3}{h} EI\alpha t + \frac{4}{h} EI\alpha t + 9EI\alpha t = \frac{23}{2} EI\alpha t; \\ R_{2H} &= -\frac{3}{2h} EI\alpha t - \frac{9}{2} EI\alpha t = -\frac{33}{4} EI\alpha t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hệ phương trình chính tắc: } 3Z_1 - \frac{3}{4} Z_2 + \frac{23}{2} \alpha t &= 0; \\ -\frac{3}{4} Z_1 + \frac{15}{32} Z_2 - \frac{33}{4} \alpha t &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Nghiem: } Z_1 = \frac{17}{18} \alpha t \text{ rad; } Z_2 = \frac{172}{9} \alpha t \text{ m.}$$

Biểu đồ mômen uốn tổng cộng được xác định theo công thức:

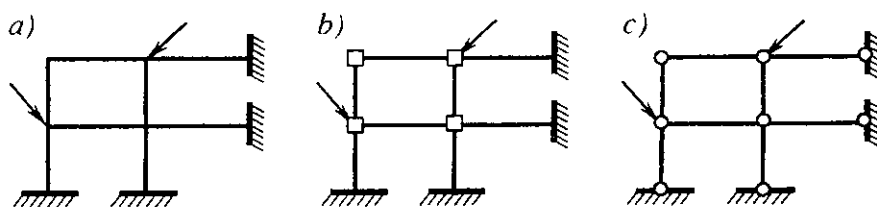
$$(M_H) = (\bar{M}_1) Z_1 + (\bar{M}_2) Z_2 + (M_{\Delta t}^0) + (M_{t_c}^0).$$

Kết quả tìm được như trên hình 6.22d.

## 6.5. Cách tính hệ có nút không chuyển vị thẳng chịu lực tập trung chỉ đặt ở nút

Xét hệ trên hình 6.23a thỏa mãn hai điều kiện nêu trên. Vì các nút không có chuyển vị thẳng cho nên trong hệ cơ bản chỉ cần đặt thêm các liên kết mômen (hình 6.23b). Dưới tác dụng của lực tập trung chỉ đặt ở nút, mômen uốn trong hệ cơ bản luôn luôn có giá trị bằng không tại mọi tiết diện. Do đó, các số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc, biểu thị phản lực trong các liên kết mômen, cũng đều bằng không. Như vậy, hệ phương trình chính tắc trở thành hệ phương trình thuần nhất đẳng cấp. Mặt khác, người ta đã chứng minh được là định thức các hệ số của hệ phương trình chính tắc trong phương pháp lực cũng như trong phương pháp chuyển vị luôn khác không. Do đó hệ phương trình này chỉ thỏa mãn khi các ẩn có giá trị duy nhất bằng không:

$$Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n = 0.$$



Hình 6.23

Thay các  $Z_k = 0$  vào công thức xác định biểu đồ mômen uốn trong hệ siêu động

$$(M_P) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + \dots + (\bar{M}_n)Z_n + (M_P^0),$$

đồng thời chú ý là biểu đồ  $(M_P^0)$  không tồn tại, ta thấy mômen uốn trong hệ siêu động không tồn tại. Do đó lực cắt, đạo hàm của mômen uốn, cũng không tồn tại. Như vậy, nội lực trong hệ chỉ còn lực dọc, nghĩa là hệ sẽ làm việc như một hệ dàn khớp, trong đó các nút và ngàm đều được thay bằng khớp như trên hình 6.23c.

**Kết luận:** trong những hệ siêu động có các nút không chuyển vị thẳng và chịu lực tập trung chỉ đặt ở nút, ta có thể thay hệ đó bằng hệ tương đương với các nút và ngàm được thay bằng khớp, tiếp đó tính như một dàn khớp thông thường.



$D$  – định thức các hệ số trong hệ phương trình (6.9),

$$D = |r_{ki}| \quad \text{với } k = 1, 2, \dots, n \text{ và } i = 1, 2, \dots, n.$$

$D_{ki}$  – định thức suy ra từ định thức  $D$  bằng cách loại bỏ hàng thứ  $k$  cột thứ  $i$  (hoặc hàng thứ  $i$  cột thứ  $k$ ).

Như vậy, vấn đề mới cần tiếp tục tìm hiểu là xác định các số hạng tự do  $r_{kp}$ . Có thể tìm các  $r_{kp}$  hoặc bằng cách tính phản lực tại liên kết thứ  $k$  đặt thêm vào do tải trọng di động gây ra trên hệ cơ bản theo quy cách đã trình bày trong mục 6.2 hoặc bằng cách vận dụng định lý tương hỗ giữa phản lực đơn vị và chuyển vị đơn vị. Thường nên dùng cách thứ nhất vì có thể sử dụng được các công thức hoặc các bảng đã thiết lập sẵn.

Thực vậy, hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị chỉ bao gồm các phần tử mẫu ghép lại với nhau tại các nút cố định, cho nên lực  $P=1$  di động trên hệ cơ bản chỉ gây ảnh hưởng trong phần tử chịu lực trực tiếp mà không ảnh hưởng đến các phần tử khác. Do đó, nếu biết nội lực trong các phần tử do tải trọng  $P=1$  có vị trí bất kỳ gây ra thì ta dễ dàng xác định các phản lực cần tìm theo quy cách đã trình bày trong mục 6.2.

Trong các bảng 6.4, 6.5 và 6.6 cung cấp các số liệu cần thiết cho việc xác định các phản lực  $r_{kp}$ . Ngoài các công thức tổng quát áp dụng cho số khoảng chia hay số điểm đặt lực bất kỳ, trong các bảng còn cung cấp các số liệu cụ thể cho trường hợp số khoảng chia trong mỗi phần tử là 2, 5 và 10.

Với mỗi điểm đặt lực  $P=1$ , ta sẽ xác định được các giá trị tương ứng của  $Z_k$  theo 6.10, tức là tìm được các tung độ tương ứng của các đường ảnh hưởng cơ bản.

### **B. Đường ảnh hưởng phản lực, nội lực và chuyển vị**

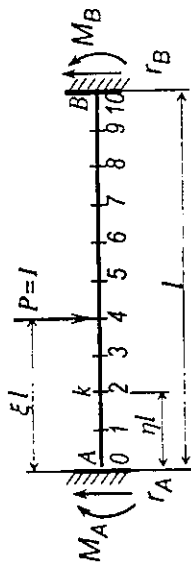
Sau khi tìm được các đ.a.h. cơ bản, áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể vẽ đ.a.h. của đại lượng  $S$  (phản lực, nội lực hay chuyển vị) tại một tiết diện  $k$  bất kỳ theo biểu thức sau:

$$\text{Đ.a.h.} S_k = \bar{S}_{k1}(\text{đ.a.h.} Z_1) + \bar{S}_{k2}(\text{đ.a.h.} Z_2) + \dots + \bar{S}_{kn}(\text{đ.a.h.} Z_n) + \text{đ.a.h.} S_k^o, \quad (6.12)$$

trong đó:

$\bar{S}_{ki}$  – giá trị của đại lượng cần vẽ đ.a.h. tại tiết diện  $k$  do riêng chuyển vị  $Z_i=1$  gây ra trong hệ cơ bản;

**Bảng 6.4**



$$M_A = -\xi(1-\xi)^2 I; \quad M_B = -\xi^2(1-\xi) I;$$

$$r_A = (1-\xi)^2(1+2\xi); \quad r_B = \xi^2(3-2\xi);$$

$$M_k = (1-\xi)^2[\eta(1+2\xi)-\xi] I \quad \text{ khi } \eta \leq \xi;$$

$$M_k = \xi^2[(1-\eta)(3-2\xi)-(1-\xi)] I \quad \text{ khi } \eta \geq \xi.$$

$\xi$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	0	-0,0810 I	-0,1280 I	-0,1470 I	-0,1440 I	-0,1250 I	-0,0960 I	-0,0630 I	-0,0320 I	-0,0090 I	0
0,1	0	0,0892 I	-0,0384 I	-0,0686 I	-0,0792 I	-0,0750 I	-0,0608 I	-0,0414 I	-0,0216 I	-0,0062 I	0
0,2	0	0,0134 I	0,0512 I	0,0118 I	-0,0144 I	-0,0250 I	-0,0256 I	-0,0198 I	-0,0112 I	-0,0034 I	0
0,3	0	0,0106 I	0,0408 I	0,0882 I	0,0504 I	0,0250 I	0,0096 I	0,0234 I	-0,0008 I	-0,0006 I	0
0,4	0	0,0078 I	0,0302 I	0,0666 I	0,1152 I	0,0750 I	0,0448 I	0,0018 I	0,0096 I	0,0022 I	0
0,5	0	0,0050 I	0,0200 I	0,0450 I	0,0800 I	0,1250 I	0,0800 I	0,0450 I	0,0200 I	0,0050 I	0
0,6	0	0,0022 I	0,0096 I	0,0234 I	0,0448 I	0,0750 I	0,1152 I	0,0666 I	0,0302 I	0,0078 I	0
0,7	0	-0,0006 I	-0,0008 I	0,0018 I	0,0096 I	0,0250 I	0,0504 I	0,0882 I	0,0408 I	0,0106 I	0
0,8	0	-0,0034 I	-0,0112 I	-0,0198 I	-0,0256 I	-0,0250 I	-0,0144 I	0,0118 I	0,0512 I	0,0134 I	0
0,9	0	-0,0062 I	-0,0216 I	-0,0414 I	-0,0686 I	-0,0750 I	-0,0792 I	-0,0686 I	-0,0384 I	0,0892 I	0
1,0	0	-0,0090 I	-0,0320 I	-0,0630 I	-0,0960 I	-0,1250 I	-0,1440 I	-0,1470 I	-0,1280 I	-0,0810 I	0

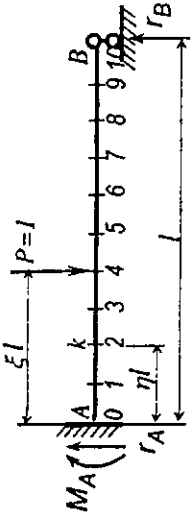
Momen uốn tại tiết diện có  $\eta =$

Bảng 6.5

$$M_A = -\frac{1}{2} \xi(1-\xi)(2-\xi); \quad M_B = 0; \quad r_A = \frac{1}{2} (2-3\xi^2+\xi^3); \quad r_B = \frac{1}{2} \xi^2(3-\xi);$$

$$M_k = \frac{1}{2} \xi^2(3-\xi)(1-\eta) - (\xi-\eta)\eta \quad \text{ khi } \eta \leq \xi;$$

$$M_k = \frac{1}{2} \xi^2(3-\eta)(1-\eta) \quad \text{ khi } \eta \geq \xi.$$



$\xi$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	0	-0,08550,1	-0,1440,1	-0,17850,1	-0,1920,1	-0,18750,1	-0,1680,1	-0,13650,1	-0,0960,1	-0,04950,1	0
0,1	0	0,01305,1	-0,0496,1	-0,09065,1	-0,1128,1	-0,11875,1	-0,1112,1	-0,09285,1	-0,0664,1	-0,03455,1	0
0,2	0	0,01160,1	0,0448,1	-0,00280,1	-0,0336,1	-0,05000,1	-0,0544,1	-0,04920,1	-0,0368,1	-0,01960,1	0
0,3	0	0,01015,1	0,0392,1	0,08505,1	0,0456,1	0,01875,1	0,0024,1	-0,00550,1	-0,0072,1	-0,00465,1	0
0,4	0	0,00780,1	0,0336,1	0,07290,1	0,1248,1	0,08750,1	0,0592,1	0,03810,1	0,0224,1	0,01030,1	0
0,5	0	0,00725,1	0,0280,1	0,06075,1	0,1040,1	0,15625,1	0,1160,1	0,08175,1	0,0520,1	0,02525,1	0
0,6	0	0,00580,1	0,0224,1	0,04860,1	0,0832,1	0,12500,1	0,1728,1	0,12540,1	0,0816,1	0,04020,1	0
0,7	0	0,00435,1	0,0168,1	0,03645,1	0,0624,1	0,09735,1	0,1296,1	0,10905,1	0,1112,1	0,05515,1	0
0,8	0	0,00290,1	0,0112,1	0,02130,1	0,0416,1	0,06250,1	0,0864,1	0,11270,1	0,1408,1	0,07010,1	0
0,9	0	0,00145,1	0,0056,1	0,01215,1	0,0208,1	0,03125,1	0,0432,1	0,05635,1	0,0704,1	0,03505,1	0
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

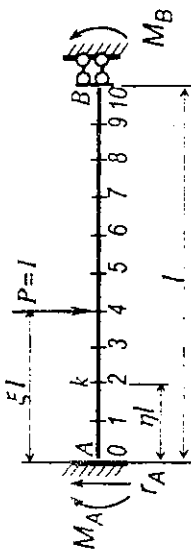
Momen uốn tại tiết diện cơ η =

**Bảng 6.6**

$$M_A = -\frac{l}{2} \xi(2-\xi); \quad M_B = \frac{l}{2} \xi^2 l; \quad r_A = l; \quad r_B = 0;$$

$$M_k = -\frac{l}{2} \xi(2-\xi) + \eta l \quad \text{khi } \eta \leq \xi;$$

$$M_k = \frac{l}{2} \xi^2 l \quad \text{khi } \eta \geq \xi.$$



$\xi$	Momen uốn tại tiết diện có $\eta =$										
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	0	-0,0950,l	-0,1800,l	-0,2550,l	-0,3200,l	-0,3750,l	-0,4200,l	-0,4550,l	-0,4800,l	-0,4950,l	-0,50,l
0,1	0	0,0050,l	-0,0800,l	-0,1550,l	-0,2200,l	-0,2750,l	-0,3200,l	-0,3550,l	-0,3800,l	-0,3950,l	-0,40,l
0,2	0	0,0050,l	0,0200,l	-0,0550,l	-0,1200,l	-0,1750,l	-0,2200,l	-0,2550,l	-0,2800,l	-0,2950,l	-0,30,l
0,3	0	0,0050,l	0,0200,l	0,0450,l	-0,0200,l	-0,0750,l	-0,1200,l	-0,1550,l	-0,1800,l	-0,1950,l	-0,20,l
0,4	0	0,0050,l	0,0200,l	0,0450,l	0,0800,l	0,0250,l	-0,0200,l	-0,0550,l	-0,0800,l	-0,0950,l	-0,10,l
0,5	0	0,0050,l	-0,0200,l	0,0450,l	0,0800,l	0,1250,l	0,0800,l	0,0450,l	0,0200,l	0,0050,l	0,00,l
0,6	0	0,0050,l	0,0200,l	0,0450,l	0,0800,l	0,1250,l	0,1800,l	0,1450,l	0,1200,l	0,1050,l	0,10,l
0,7	0	0,0050,l	0,0200,l	0,0450,l	0,0800,l	0,1250,l	0,1800,l	0,2450,l	0,2200,l	0,2050,l	0,20,l
0,8	0	0,0050,l	0,0200,l	0,0450,l	0,0800,l	0,1250,l	0,1800,l	0,2450,l	0,3200,l	0,3050,l	0,30,l
0,9	0	0,0050,l	0,0200,l	0,0450,l	0,0800,l	0,1250,l	0,1800,l	0,2450,l	0,3200,l	0,4050,l	0,40,l
1,0	0	0,0050,l	0,0200,l	0,0450,l	0,0800,l	0,1250,l	0,1800,l	0,2450,l	0,3200,l	0,4050,l	0,50,l

d.a.h.  $S_k^0$  – đường ảnh hưởng của đại lượng  $S$  tại tiết diện  $k$  đang xét do tải trọng  $P=1$  gây ra trên hệ cơ bản.

**Ví dụ 6.7.** Cho hệ siêu động như trên hình 6.24a. Chia đường xe chạy thành 10 đoạn mỗi đoạn có chiều dài  $l$  m và đánh số các điểm đặt lực như trên hình 6.24a. Yêu cầu: vẽ đường ảnh hưởng mômen uốn tại các tiết diện ở các điểm chia 2 và 5.

Để giải bài toán này ta tiến hành theo thứ tự như sau:

1. *Tìm số ẩn và lập hệ cơ bản:* số ẩn  $n = 3$ , hệ cơ bản như trên hình 6.24b.

2. *Vẽ biểu đồ mômen uốn trong hệ cơ bản do các  $Z_i=1$*  (hình 6.24c, d, e).

3. *Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc.* Kết quả:

$$\begin{aligned} r_{11} &= 8EI; & r_{22} &= 11EI; & r_{33} &= 1,5EI; \\ r_{12} &= r_{21} = 2EI; & r_{13} &= r_{31} = -1,5EI; & r_{23} &= r_{32} = -1,5EI. \end{aligned}$$

4. *Lập hệ phương trình chính tắc:*

$$\begin{aligned} 8EIZ_1 + 2EIZ_2 - 1,5EIZ_3 + r_{1P} &= 0; \\ 2EIZ_1 + 11EIZ_2 - 1,5EIZ_3 + r_{2P} &= 0; \\ -1,5EIZ_1 - 1,5EIZ_2 + 1,5EIZ_3 + r_{3P} &= 0. \end{aligned}$$

5. *Xác định các hệ số ảnh hưởng.* Kết quả:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= -19/123EI; & \beta_{22} &= -13/123EI; & \beta_{33} &= -112/123EI; \\ \beta_{12} &= \beta_{21} = 1/123EI; & \beta_{13} &= \beta_{31} = -18/123EI; & \beta_{23} &= \beta_{32} = -12/123EI. \end{aligned}$$

6. *Các biểu thức tìm ẩn cơ bản:*

$$\begin{aligned} Z_1 &= (-19r_{1P} + r_{2P} - 18r_{3P}) / 123EI; \\ Z_2 &= (r_{1P} - 13r_{2P} - 12r_{3P}) / 123EI; \\ Z_3 &= (-18r_{1P} - 12r_{2P} - 112r_{3P}) / 123EI. \end{aligned}$$

7. *Xác định các số hạng tự do  $r_{kP}$*

✦ Khi  $P=1$  di động trên nhịp  $AB$ , sau khi vận dụng các điều kiện cân bằng và theo bảng 6.4 ta tìm được:

$$r_{1P} = -M_A = \xi(1-\xi)^2l; \quad r_{2P} = -M_B = -\xi^2(1-\xi)l; \quad r_{3P} = 0.$$

Lần lượt cho  $\xi$  các giá trị bằng 0,2; 0,4; 0,6; 0,8 ta sẽ tìm được các giá trị tương ứng của các số hạng tự do. Kết quả ghi trên bảng 6.7.

Cũng có thể xác định các  $r_{1P}$  và  $r_{2P}$  theo mômen uốn  $M_k$  để sử dụng



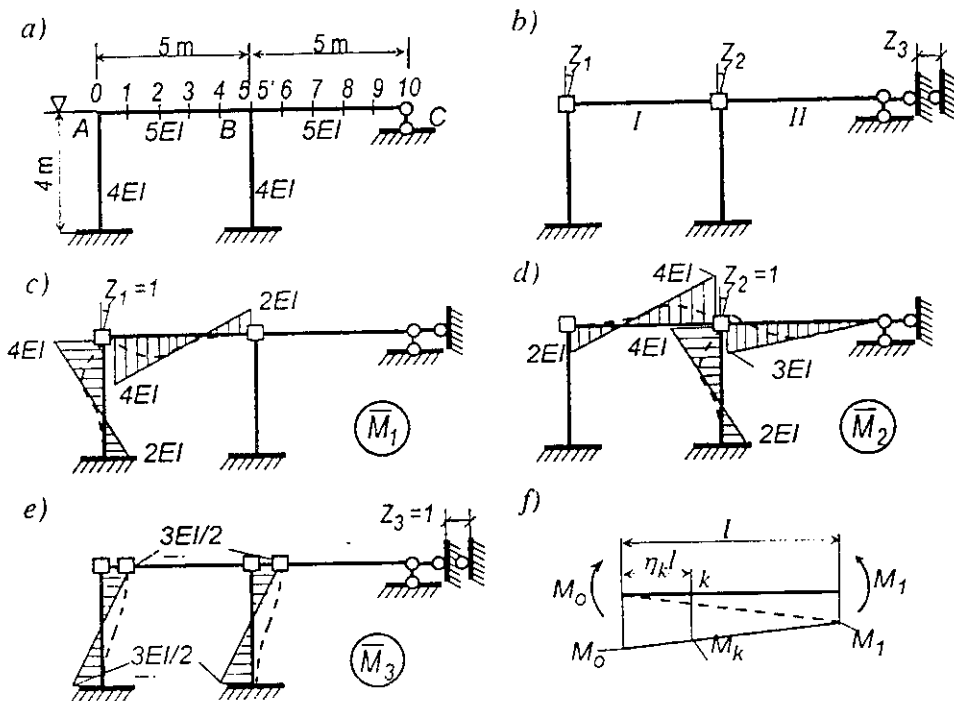
các số liệu bằng số đã có sẵn trong bảng 6.4. Lúc này, ta có:

$$r_{1P} = M_k \text{ với } \eta = 0 \text{ (sử dụng hàng đầu của bảng số liệu 6.4);}$$

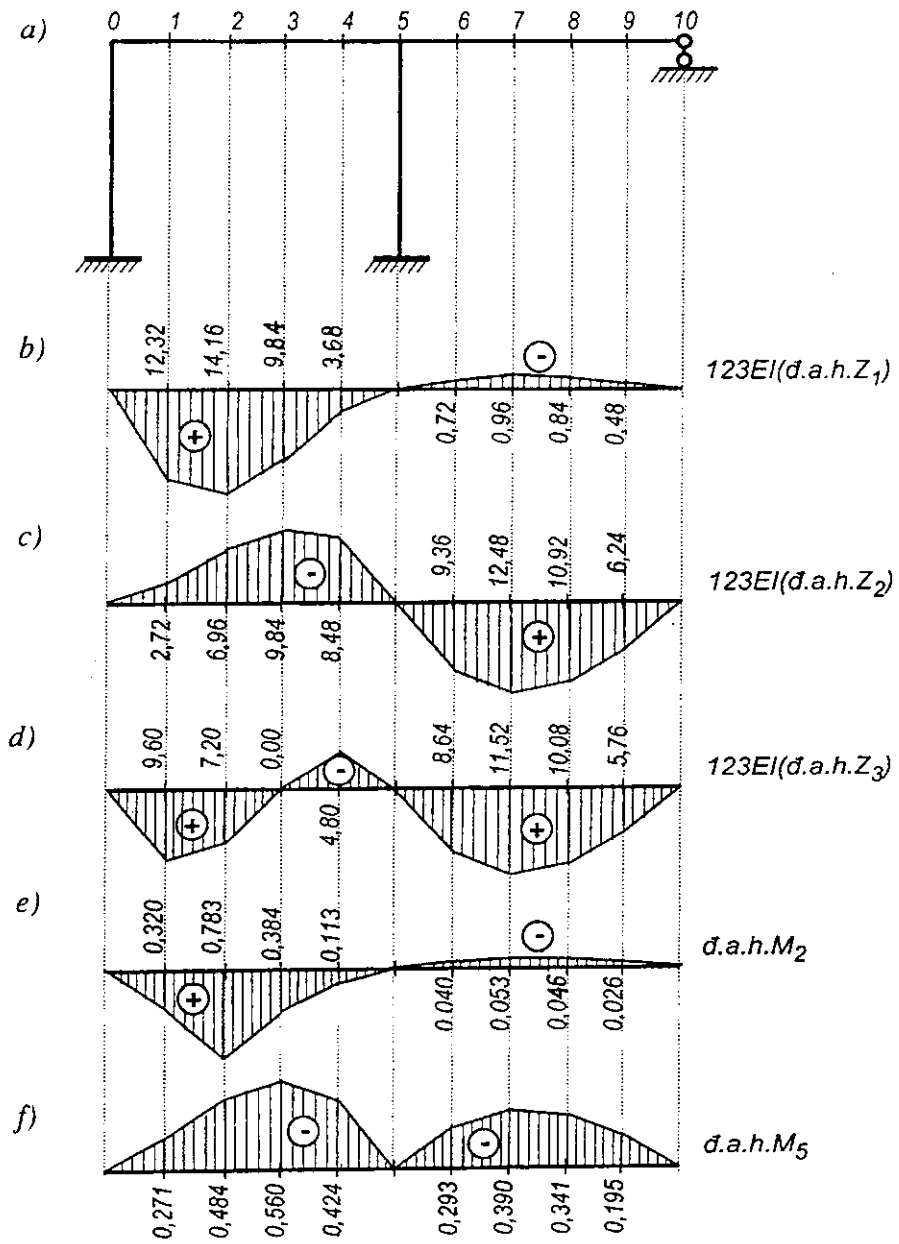
$$r_{2P} = -M_k \text{ với } \eta = 1 \text{ (sử dụng hàng cuối của bảng số liệu 6.4).}$$

**Bảng 6.7**

Điểm đặt lực	$r_{1P}$	$r_{2P}$	$r_{3P}$	Tung độ (đ.a.h. $Z$ ) $\times 123EI$		
				$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$
1	-0,128.l	0,032.l	0	12,32	-2,72	9,60
2	-0,144.l	0,096.l	0	14,16	-6,96	7,20
3	-0,096.l	0,144.l	0	9,84	-9,84	0,00
4	-0,032.l	0,128.l	0	3,68	-8,48	-4,80
5	0	0,000.l	0	0,00	0,00	0,00
6	0	-0,144.l	0	-0,72	9,36	8,64
7	0	-0,192.l	0	-0,96	12,48	11,52
8	0	-0,168.l	0	-0,84	10,92	10,08
9	0	-0,096.l	0	-0,48	6,24	5,76



Hình 6.24



Hình 6.25

✦ Khi  $P=1$  di động trên nhịp  $BC$ , sau khi vận dụng các điều kiện cân bằng và theo bảng 6.5 ta tìm được:

$$r_{1P} = 0; \quad r_{2P} = -M_A = \frac{1}{2} \xi(1-\xi)(2-\xi)l; \quad r_{3P} = 0.$$

Cũng có thể xác định  $r_{2P}$  theo mômen uốn  $M_k$  với  $\eta = 0$  để sử dụng các số liệu trên hàng đầu của bảng 6.5.

8. *Xác định tung độ các đường ảnh hưởng cơ bản.* Sau khi thực hiện các phép tính theo các biểu thức đã lập ở bước thứ 6, ta tìm được các kết quả như trong bảng 6.7. Các đường ảnh hưởng cơ bản tìm được như trên các hình 6.25b, c, d.

9. *Tìm đường ảnh hưởng nội lực.* Áp dụng công thức (6.12) cho trường hợp này, ta có biểu thức xác định đ.a.h. mômen uốn tại tiết diện 2 và 5.

$$d.a.h.M_2 = \bar{M}_{21}(d.a.h.Z_1) + \bar{M}_{22}(d.a.h.Z_2) + \bar{M}_{23}(d.a.h.Z_3) + d.a.h.M_2^o;$$

$$d.a.h.M_5 = \bar{M}_{51}(d.a.h.Z_1) + \bar{M}_{52}(d.a.h.Z_2) + \bar{M}_{53}(d.a.h.Z_3) + d.a.h.M_5^o.$$

Các đại lượng  $\bar{M}_{ki}$  biểu thị mômen uốn tại tiết diện  $k$  do  $Z_i=1$  gây ra trong hệ cơ bản. Để xác định, ta vận dụng các biểu đồ mômen uốn đã tìm được trên hình 6.24c, d, e. Nếu chú ý là từ hình 6.24f ta có thể tìm mômen uốn tại tiết diện  $k$  bất kỳ trong thanh theo mômen uốn  $M_o$  và  $M_l$  ở hai đầu thanh như sau:

$$M_k = (1 - \eta_k)M_o + \eta_k M_l.$$

Trong trường hợp này ta có:

$$\bar{M}_{21} = 1,6EI; \quad \bar{M}_{51} = -2EI; \quad \bar{M}_{22} = -0,4EI;$$

$$\bar{M}_{52} = -4EI; \quad \bar{M}_{23} = 0; \quad \bar{M}_{53} = 0.$$

Đ.a.h.  $M_2^o$  và đ.a.h.  $M_5^o$  lần lượt là đ.a.h. mômen uốn tại tiết diện 2 và 5 trong hệ cơ bản.

Trong hệ cơ bản, tải trọng  $P=1$  chỉ gây ảnh hưởng cục bộ trên phạm vi mỗi phần tử nên có thể dễ dàng tìm các tung độ của chúng theo các số liệu cho trong bảng 6.4 và 6.5. Kết quả tính được ghi trên bảng 6.8.

Sau khi tổ hợp các số liệu vừa tìm được theo các công thức nêu ở trên ta sẽ tìm được giá trị các tung độ đường ảnh hưởng nội lực cần tìm. Kết quả ghi trên bảng 6.8. Các đường ảnh hưởng tương ứng vẽ trên hình 6.25e, f.

**Bảng 6.8**

<i>Điểm đặt lực</i>	<i>đ.a.h. <math>M_2^0</math></i>	<i>đ.a.h. <math>M_5^0</math></i>	<i>đ.a.h. <math>M_2</math></i>	<i>đ.a.h. <math>M_5</math></i>
1	0,0302. l	- 0,0320. l	0,320	- 0,271
2	0,1152. l	- 0,0960. l	0,783	- 0,484
3	0,0448. l	- 0,1440. l	0,384	- 0,560
4	0,0096. l	- 0,1280. l	0,123	- 0,424
5	0	0	0,000	0,000
6	0	0	- 0,040	- 0,293
7	0	0	- 0,053	- 0,390
8	0	0	- 0,046	- 0,341
9	0	0	- 0,026	- 0,195

## CÂU HỎI ÔN TẬP

- 6.1. Trình bày và phân tích những giả thiết cơ bản của phương pháp chuyển vị.
- 6.2. Trình bày cách xác định bậc siêu động trong phương pháp chuyển vị (cho ví dụ). Bậc siêu động phụ thuộc vào những yếu tố nào?
- 6.3. Trình bày cách lập hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị.
- 6.4. Trình bày nội dung phương pháp chuyển vị khi tính hệ chịu tải trọng bất động.
- 6.5. Trình bày cách xác định các hệ số, số hạng tự do trong phương pháp chuyển vị khi tính hệ chịu tải trọng bất động.
- 6.6. Trình bày cách xác định chuyển vị khi tính hệ chịu tác dụng của tải trọng theo phương pháp chuyển vị.
- 6.7. Trình bày cách xác định chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu thanh theo phương vuông góc với trục thanh trong hệ có các thanh đứng không song song.

- 6.8. Thông qua một ví dụ, trình bày nội dung phương pháp chuyển vị khi tính hệ chịu chuyển vị cưỡng bức gối tựa.
- 6.9. Thông qua một ví dụ, trình bày nội dung phương pháp chuyển vị khi tính hệ chịu biến dạng vì nhiệt và chế tạo không chính xác.
- 6.10. Phát biểu và giải thích kết luận về hệ có nút không chuyển vị thẳng chịu tải trọng tập trung chỉ đặt ở nút.
- 6.11. Trình bày cách vẽ đường ảnh hưởng trong hệ siêu động theo phương pháp chuyển vị.

# 7 Phương pháp hỗn hợp và phương pháp liên hợp

Trong các chương trên, ta đã nghiên cứu phương pháp lực và phương pháp chuyển vị, đó là các phương pháp cơ bản và được xem là chính xác, tổng quát. Trong thực hành, khi tính một hệ thanh cụ thể, cần đặt vấn đề:

- \* Nên chọn dùng phương pháp nào?
- \* Có thể phối hợp hai phương pháp đó để giảm nhẹ khối lượng tính toán được hay không?

Đó là nội dung sẽ đề cập đến trong chương này.

## 7.1. So sánh phương pháp lực và phương pháp chuyển vị - Cách chọn phương pháp tính

Để thấy được ưu khuyết điểm của từng phương pháp, ta hãy lập bảng so sánh (bảng 7.1) hai phương pháp tương ứng với các nội dung cần thực hiện trong quá trình tính toán một kết cấu siêu tĩnh đồng thời là siêu động.

Qua bảng so sánh 7.1 ta thấy: phương pháp chuyển vị nói chung đơn giản hơn so với phương pháp lực. Tuy nhiên cũng không thể kết luận được là phương pháp chuyển vị ưu việt hơn phương pháp lực. Cần phải căn cứ vào bài toán cụ thể và công cụ tính toán của người thiết kế để chọn lựa phương pháp tính. Nếu chỉ có công cụ tính toán thông thường thì người thiết kế nên căn cứ vào số lượng ẩn để quyết định việc chọn lựa. Tất nhiên, đối với một bài toán cụ thể, nên chọn dùng phương pháp nào có số ẩn ít hơn. Trong trường hợp số ẩn theo cả hai phương pháp tương đương nhau, nên chọn dùng phương pháp chuyển vị vì các khâu tính toán trong phương pháp này thường đơn giản hơn.

Đối với những hệ đối xứng chịu nguyên nhân bất kỳ, ta có thể áp dụng nguyên lý cộng tác dụng để phân tích nguyên nhân tác dụng thành đối xứng và phản xứng (xem mục 5.7). Như vậy, có thể đưa bài toán về hai trường hợp:

- ✦ *Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng.* Nói chung, để giải bài

toán này ta nên vận dụng phương pháp chuyển vị vì phương pháp này thường yêu cầu số ẩn ít hơn.

✦ *Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng.* Nói chung nên dùng phương pháp lực để giải bài toán này vì thường yêu cầu số ẩn ít hơn.

**Bảng 7.1**

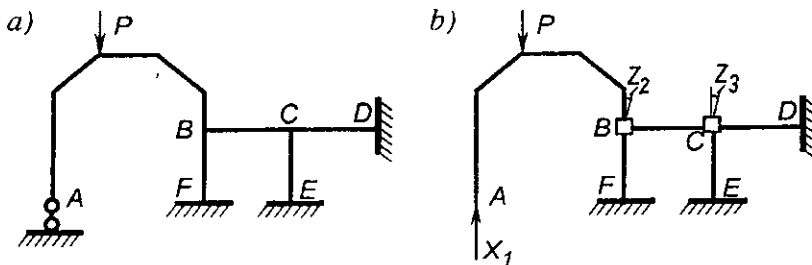
<i>Nội dung so sánh</i>	<i>Phương pháp lực</i>	<i>Phương pháp chuyển vị</i>
Độ chính xác	Nếu chấp nhận các giả thiết như nhau thì kết quả hoàn toàn giống nhau.	
Phạm vi áp dụng	Tổng quát, áp dụng cho hệ bất kỳ.	Tổng quát, áp dụng cho hệ bất kỳ, thường chỉ nên áp dụng cho hệ khung, dầm.
Số lượng ẩn	Bằng bậc siêu tĩnh (không phụ thuộc các giả thiết).	Bằng bậc siêu động (phụ thuộc các giả thiết, cấu kiện mẫu, sơ đồ tĩnh chấp nhận).
Hệ cơ bản	<ul style="list-style-type: none"> <li>Loại bỏ bớt liên kết, bất biến hình.</li> <li>Có thể chọn theo nhiều cách khác nhau.</li> <li>Cách chọn có ảnh hưởng đến khối lượng tính toán.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Thêm liên kết ngăn cản chuyển vị của các nút.</li> <li>Duy nhất, chỉ bao gồm các phần tử mẫu.</li> </ul>
Biểu đồ $\bar{M}_k$ và $M_p^0$	Người thiết kế tự vẽ (tốn thời gian, dễ có sai lầm).	Vẽ theo bảng mẫu (ít sai lầm).
Biểu đồ do sự thay đổi nhiệt độ và chuyển vị gối tựa trong hệ cơ bản	Không tồn tại nếu hệ cơ bản là tĩnh định.	Tồn tại (phức tạp, dễ có sai lầm).
Các hệ số và số hạng tự do của hệ PTCT	Cần thực hiện phép nhân biểu đồ để xác định (phức tạp, dễ sai lầm).	Tìm theo các điều kiện cân bằng (đơn giản, ít sai lầm).
Hệ phương trình chính tắc	Nói chung đầy đủ (các hệ số phụ khác không) nên tốn thời gian hơn khi giải hệ phương trình.	Nói chung không đầy đủ (có nhiều hệ số phụ bằng không), đỡ tốn thời gian hơn khi giải hệ phương trình.
Biểu đồ $M$ cuối cùng	Tương đương (cùng tìm được bằng cách tổ hợp các biểu đồ).	
Kiểm tra kết quả	Theo điều kiện chuyển vị nên phức tạp, khó phát hiện.	Theo điều kiện cân bằng nên đơn giản.

Trong thực tế ta có thể gặp những hệ (hình 7.1), trong đó có bộ phận thích hợp với cách giải theo phương pháp chuyển vị (phần  $BCDEF$ ), có bộ phận thích hợp với cách giải theo phương pháp lực (phần  $AB$ ). Nếu vận dụng độc lập một trong hai phương pháp để giải bài toán thì số lượng ẩn lớn. Như vậy, đối với những hệ này ta có thể đồng thời phát huy ưu điểm của cả hai phương pháp đó hay không? Những phương pháp trình bày dưới đây sẽ đáp ứng được yêu cầu này.

## 7.2. Phương pháp hỗn hợp

Để trình bày nội dung phương pháp, ta xét hệ trên hình 7.1a với giả thiết hệ chỉ chịu tác dụng của tải trọng. Đối với những nguyên nhân khác, nguyên tắc tính toán cũng tương tự. Ta nhận thấy, nếu dùng phương pháp lực để tính thì hệ trên hình 7.1a có bảy ẩn, còn nếu dùng phương pháp chuyển vị sẽ có mười ẩn. Để giải bài toán này, nếu vận dụng phương pháp hỗn hợp do *A.A. Gvôzđiev* kiến nghị thì số lượng ẩn sẽ giảm xuống khá nhiều.

Trong phương pháp hỗn hợp ta chọn hệ cơ bản như sau: loại bỏ các liên kết và chọn lực làm ẩn trên các bộ phận thích hợp với phương pháp lực, đặt thêm các liên kết ngăn cản chuyển vị của các nút và chọn chuyển vị của các nút đó làm ẩn trên những bộ phận thích hợp với phương pháp chuyển vị.



Hình 7.1

Ví dụ, đối với hệ cho trên hình 7.1a, trong bộ phận  $AB$  thích hợp với phương pháp lực ta loại bỏ gối tựa di động  $A$  và nhận phản lực  $X_1$  tại gối  $A$  làm ẩn; trong bộ phận  $BCDEF$  thích hợp với phương pháp chuyển vị ta đặt thêm hai liên kết mômen tại nút  $B$  và nút  $C$  đồng thời nhận các chuyển vị xoay  $Z_2$  và  $Z_3$  tại các nút này làm ẩn. Hệ cơ bản của phương pháp hỗn hợp đối với hệ đang xét là hệ vẽ trên hình 7.1b. Như vậy, số ẩn theo phương pháp hỗn hợp là ba. Tương tự như trong phương pháp lực và phương pháp chuyển vị, để tính hệ đã cho theo phương pháp hỗn hợp ta cũng thực hiện



tính toán trên hệ cơ bản đồng thời phải thiết lập các điều kiện bổ sung nhằm đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống như hệ đã cho.

Các điều kiện bổ sung bao gồm:

❖ *Chuyển vị theo phương của các liên kết bị loại bỏ do các lực X, các chuyển vị cưỡng bức Z và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản phải bằng không.* Đối với hệ trên hình 7.1a, ta có điều kiện: chuyển vị tại A theo phương thẳng đứng do  $X_1, Z_2, Z_3$  và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản phải bằng không, tức là  $\Delta_1 = 0$ .

❖ *Phản lực trong các liên kết đặt thêm vào hệ do các lực X, các chuyển vị cưỡng bức Z và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản phải bằng không.* Đối với hệ đang xét, ta có điều kiện: phản lực mômen trong các liên kết ở nút B và C do  $X_1, Z_2, Z_3$  và do tải trọng gây ra phải bằng không, tức là  $R_2 = 0$ ;  $R_3 = 0$ .

Trên cơ sở nguyên lý cộng tác dụng, sau khi khai triển các điều kiện bổ sung ta sẽ được hệ phương trình chính tắc của phương pháp hỗn hợp để xác định các ẩn X và Z. Đối với hệ đang xét, hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}Z_2 + \delta_{13}Z_3 + \Delta_{1P} &= 0; \\ r_{21}X_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2P} &= 0; \\ r_{31}X_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3P} &= 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Trong hệ phương trình chính tắc của phương pháp hỗn hợp có bốn loại hệ số và hai loại số hạng tự do. Ta hãy tìm hiểu ý nghĩa và cách xác định chúng.

$\delta_{ik}$  – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $X_i$  do lực  $X_k=1$  gây ra trong hệ cơ bản. Chuyển vị này được xác định theo công thức đã biết:

$$\delta_{ik} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_k),$$

với  $(\overline{M}_i), (\overline{M}_k)$  là biểu đồ mômen uốn lần lượt do  $X_i=1$  và do  $X_k=1$  gây ra trong hệ cơ bản.

$\delta_{ij}$  – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $X_i$  do chuyển vị cưỡng bức  $Z_j=1$  gây ra trong hệ cơ bản (ký hiệu dấu chấm ở phía trên để nói lên chuyển vị này do chuyển vị cưỡng bức gây ra, phân biệt với chuyển vị do lực gây ra). Có thể xác định các chuyển vị này theo định lý tương hỗ giữa chuyển vị đơn vị và phản lực đơn vị  $\delta_{ij} = -r_{ji}$  hoặc

theo công thức chuyển vị (4.25), (4.33) hoặc xác định trực tiếp bằng hình học.

$r_{js}$  – phản lực trong liên kết thứ  $j$  do chuyển vị cưỡng bức  $Z_s=1$  gây ra trong hệ cơ bản. Phản lực này được xác định theo các điều kiện cân bằng như đã trình bày trong phương pháp chuyển vị.

$i_{ji}$  – phản lực trong liên kết thứ  $j$  do lực  $X_i=1$  gây ra trong hệ cơ bản (ký hiệu dấu chấm ở phía trên để nói lên phản lực này do lực gây ra, phân biệt với phản lực do chuyển vị gây ra). Phản lực này được xác định theo các điều kiện cân bằng như đã biết trong phương pháp chuyển vị.

$\Delta_{iP}$  – chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $X_i$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản, được xác định theo công thức đã biết trong phương pháp lực:

$$\Delta_{iP} = (\bar{M}_i)(M_P^o),$$

với  $(M_P^o)$  là biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.

$R_{jP}$  – phản lực tại liên kết thứ  $j$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản, được xác định theo các điều kiện cân bằng như đã biết trong phương pháp chuyển vị.

Sau khi thiết lập và giải hệ phương trình chính tắc để xác định các ẩn số  $X$  và  $Z$  ta vẽ biểu đồ nội lực trong hệ bằng cách tổ hợp các biểu đồ tương tự như đã thực hiện trong phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Ví dụ đối với hệ đang xét, biểu đồ mômen uốn cuối cùng tìm được theo công thức sau:

$$(M_P) = (\bar{M}_1)X_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + (\bar{M}_3)Z_3 + (M_P^o). \quad (7.2)$$

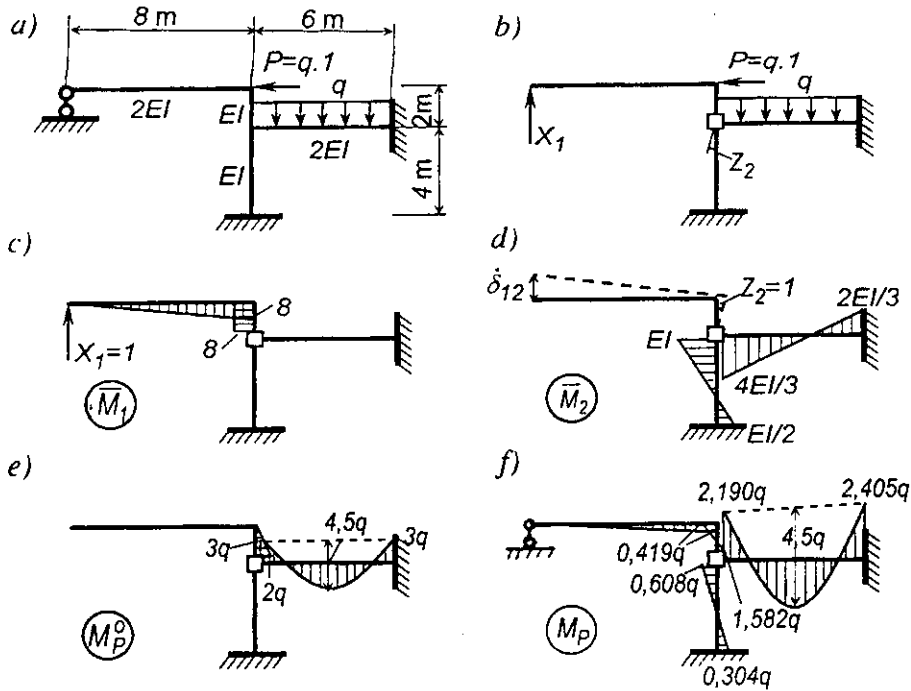
Để kiểm tra kết quả ta có các điều kiện sau: chuyển vị theo phương của các liên kết bị loại bỏ và phản lực trong các liên kết đặt thêm vào hệ, phải bằng không.

**Ví dụ 7.1.** Vận dụng phương pháp hỗn hợp để vẽ biểu đồ mômen uốn trong hệ trên hình 7.2a.

Thứ tự thực hiện như sau:

1. *Lập hệ cơ bản:* Nếu dùng phương pháp chuyển vị để giải bài toán thì sẽ có ba ẩn, còn nếu dùng phương pháp lực thì sẽ có bốn ẩn. Ta nhận thấy phần bên trái của hệ thích hợp với phương pháp lực còn phần bên phải của hệ thích hợp với phương pháp chuyển vị. Do đó ta sẽ chọn hệ cơ bản

theo phương pháp hỗn hợp như trên hình 7.2b, với hai ẩn là  $X_1$  và  $Z_2$ .



Hình 7.2

2. Vẽ các biểu đồ mômen uốn đơn vị do  $X_1=1$  (hình 7.2c), do  $Z_2=1$  (hình 7.2d) và biểu đồ mômen uốn do tải trọng (hình 7.2e) gây ra trong hệ cơ bản.

3. Xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \frac{1}{E \cdot 2I} \cdot \frac{8 \cdot 8}{2} + \frac{1}{EI} \cdot 8 \cdot 2 \cdot 8 = \frac{640}{3EI};$$

$$\delta_{12} = -r_{21} = 8, \text{ (tách nút 2 của biểu đồ } \bar{M}_1 \text{);}$$

$$r_{22} = \frac{4}{3}EI + EI = \frac{7EI}{3} \text{ (tách nút 2 của biểu đồ } \bar{M}_2 \text{);}$$

$$\Delta_{1P} = (\bar{M}_1)(M_P^o) = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{2q \cdot 2}{2} \cdot 8 = -\frac{16q}{EI},$$

$$R_{2P} = 2q - 3q = -q \text{ (tách nút 2 của biểu đồ } M_P^o \text{).}$$

4. Hệ phương trình chính tắc:

$$\frac{640}{3EI} X_1 + 8Z_2 - \frac{16q}{EI} = 0; \quad -8X_1 + \frac{7EI}{3} Z_2 - q = 0.$$

5. Giải hệ phương trình chính tắc. Kết quả:

$$X_1 = \frac{33}{632} q \text{ kN}; \quad Z_2 = \frac{48}{79EI} q \text{ rad.}$$

6. Vẽ biểu đồ mômen uốn tổng cộng theo công thức:

$$(M_P) = (\bar{M}_1)X_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + (M_P^0).$$

Kết quả tìm được như trên hình 7.2f.

### 7.3. Phương pháp liên hợp

Để giải những loại bài toán nêu ở trên, ta còn có thể vận dụng phương pháp liên hợp, trong đó phối hợp song song phương pháp lực và phương pháp chuyển vị.

Trong phương pháp liên hợp, ta có thể thực hiện theo một trong hai hướng sau:

✦ Chọn hệ cơ bản theo phương pháp lực nhưng không loại bỏ hết các liên kết thừa mà chỉ loại bỏ các liên kết thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp lực.

Lúc này hệ cơ bản là siêu tĩnh. Để vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ cơ bản siêu tĩnh ta sẽ vận dụng phương pháp chuyển vị bởi vì bộ phận siêu tĩnh của hệ cơ bản chính là bộ phận thích hợp phương pháp chuyển vị.

Để làm sáng tỏ, ta xét hệ cho trên hình 7.1a. Chọn hệ cơ bản siêu tĩnh như trên hình 7.3a. Phương trình chính tắc có dạng:

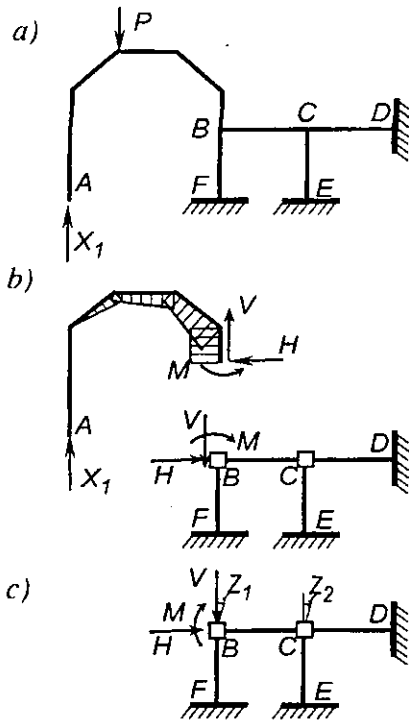
$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0. \quad (7.3)$$

Hệ số  $\delta_{11}$  và số hạng tự do  $\Delta_{1P}$  là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $X_1$  lần lượt do lực  $X_1=1$  và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản siêu tĩnh.

Để xác định các hệ số và số hạng tự do ta vẫn sử dụng công thức chuyển vị đã biết song cần phải vẽ được biểu đồ nội lực do  $X_1=1$  và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản siêu tĩnh.

Chẳng hạn, để tìm biểu đồ mômen uốn do riêng lực  $X_1$  gây ra trong hệ cơ bản siêu tĩnh thì ta cần thực hiện như thế nào?

Lúc này, trong bộ phận tĩnh định của hệ ta vẽ biểu đồ mômen uốn như thường lệ còn trong bộ phận siêu tĩnh của hệ thì sẽ dùng phương pháp



Hình 7.3

chuyển vị để giải với các ngoại lực  $M$ ,  $V$ ,  $H$  được xác định theo lực  $X_1=1$  (hình 7.3b). Hệ cơ bản của bài toán phụ này có dạng như trên hình 7.3c. Hệ phương trình chính tắc tương ứng:

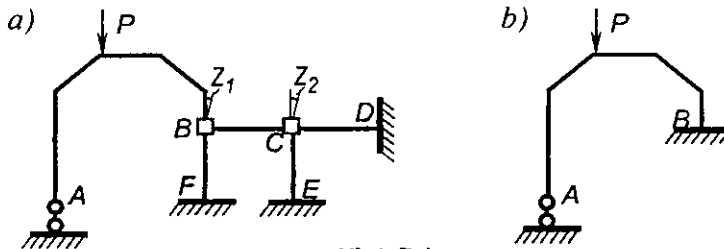
$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} &= 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} &= 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Sau khi giải bài toán phụ với các ẩn  $Z$ , ta sẽ tìm được các biểu đồ cần thiết trong hệ cơ bản của phương pháp lực. Để tránh phải giải nhiều lần hệ phương trình (7.4) với các nguyên nhân khác nhau, ta dùng phương pháp hệ số ảnh hưởng.

Biểu đồ nội lực cuối cùng sẽ tìm được theo công thức quen biết trong phương pháp lực sau khi giải hệ phương trình (7.3). Trong trường hợp hệ đang xét, ta có:

$$(M_P) = (\bar{M}_j)X_1 + (M_P^0). \quad (7.5)$$

✦ Chọn hệ cơ bản theo phương pháp chuyển vị nhưng không đặt đầy đủ các liên kết phụ nhằm ngăn cản tất cả các chuyển vị nút mà chỉ đặt liên kết phụ tại các nút thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp chuyển vị.



Hình 7.4

Lúc này hệ cơ bản là siêu động, còn có một số phần tử không phải là phần tử mẫu. Để vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ cơ bản siêu động, ta sẽ vận dụng phương pháp lực bởi vì bộ phận siêu động (bộ phận có các phần tử không phải là phần tử mẫu) chính là bộ phận thích hợp với phương pháp lực.

Ví dụ, với hệ trên hình 7.1a, ta lập hệ cơ bản như trên hình 7.4a, trong đó phần tử  $AB$  không phải là phần tử mẫu. Hệ có hai ẩn là  $Z_1$  và  $Z_2$ . Trước khi giải bài toán này ta cần thực hiện bài toán phụ: tìm nội lực trong phần tử không phải là phần tử mẫu (phần tử  $AB$  trên hình 7.4b) chịu tác dụng của tải trọng và chuyển vị cưỡng bức tại các liên kết (chuyển vị xoay tại ngàm  $B$ ). Bài toán phụ này sẽ được thực hiện theo phương pháp lực với các ẩn  $X$  (ẩn  $X_I$ ).

Sau khi giải bài toán phụ ta có thể dễ dàng giải bài toán chính theo phương pháp chuyển vị đã biết với hệ cơ bản là siêu động.

Như vậy, trong cả hai cách thực hiện, phương pháp liên hợp đều đưa bài toán về hai bài toán độc lập, một bài toán được giải theo phương pháp lực còn một bài toán được giải theo phương pháp chuyển vị. So với phương pháp hỗn hợp, số ẩn tổng cộng của hai phương pháp như nhau nhưng trong phương pháp liên hợp các phương trình chính tắc được phân thành hai nhóm độc lập với nhau. Đó là ưu điểm chính của phương pháp liên hợp.

## CÂU HỎI ÔN TẬP

- 7.1. So sánh phương pháp lực và phương pháp chuyển vị
- 7.2. Khi tính hệ đối xứng chịu nguyên nhân bất kỳ, nên thực hiện như thế nào?
- 7.3. Phương pháp hỗn hợp:
  - nên áp dụng cho những trường hợp nào?
  - trình bày nội dung phương pháp qua một ví dụ.
- 7.4. Phương pháp liên hợp:
  - nên áp dụng cho những trường hợp nào?
  - trình bày nội dung phương pháp qua một ví dụ.
- 7.5. So sánh phương pháp hỗn hợp và phương pháp liên hợp.

# 8

## Cách tính hệ thanh không gian

Trong các chương trước ta đã nghiên cứu hệ thanh phẳng là những hệ trong đó trục của các thanh đều nằm trong cùng một mặt phẳng, chỉ có khả năng cân bằng khi nguyên nhân tác dụng trong mặt phẳng của hệ.

Phần lớn các hệ trong thực tế đều có sơ đồ không nằm trong cùng một mặt phẳng, gọi là *hệ không gian*. Trong khá nhiều trường hợp ta có thể phân tích bài toán không gian để đưa về cách tính theo sơ đồ phẳng. Song, cũng có những trường hợp không thể phân tích thành sơ đồ phẳng hoặc tính toán theo sơ đồ phẳng sẽ dẫn đến sai số lớn thì nhất thiết phải thực hiện tính toán theo sơ đồ không gian.

Cũng tương tự như trong hệ phẳng, hệ không gian dùng trong xây dựng phải là hệ bất biến hình. Về nguyên tắc cách cấu tạo hình học các hệ không gian cũng tương tự như các hệ phẳng nhưng có phần phức tạp hơn khi vận dụng. Thay cho khái niệm *miếng cứng* trong hệ phẳng, trong trường hợp hệ không gian ta dùng khái niệm *vật thể*.

*Vật thể là một hệ không gian bất biến hình một cách rõ rệt.*

Ngoài ra cần chú ý là trong không gian một vật thể có sáu bậc tự do (ba chuyển vị tịnh tiến và ba chuyển vị xoay) so với một vật thể khác được xem là bất động.

### 8.1. Các loại liên kết không gian

Để nối các vật thể thành một hệ không gian bất biến hình, ta dùng các liên kết không gian. Tương tự như liên kết phẳng, liên kết không gian được chia thành liên kết đơn giản và liên kết phức tạp.

#### A. Liên kết đơn giản

*Liên kết đơn giản là liên kết dùng để nối hai vật thể.* Dưới đây là một số dạng liên kết đơn giản thường gặp.

##### 1. Liên kết thanh không gian

Liên kết thanh không gian (hình 8.1a) được cấu tạo từ một thanh (hoặc

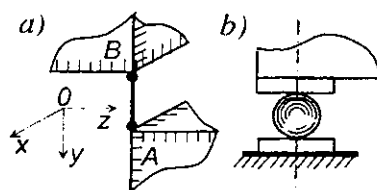
một vật thể) có khớp cầu lý tưởng ở hai đầu. Để phân biệt với khớp phẳng (khớp bản lề hình trụ) đã được ký hiệu bằng khuyên tròn màu trắng, ta sẽ ký hiệu khớp cầu bằng khuyên tròn màu đen.

Liên kết thanh khử được chuyển vị thẳng theo phương trục thanh của vật thể  $B$  so với vật thể  $A$  xem như cố định, tức là khử được một bậc tự do. Liên kết thanh vẫn cho phép vật thể  $B$  chuyển vị thẳng trong mặt phẳng vuông góc với trục thanh (hai bậc tự do) và quay được quanh ba trục bất kỳ (ba bậc tự do).

*Trong liên kết thanh phát sinh một phản lực dọc theo trục thanh.*

Liên kết thanh là một khái niệm mở rộng của gối khớp cầu di động (hình 8.1b) thường dùng để nối một vật thể với trái đất.

Liên kết thanh không gian là *liên kết cơ bản* bởi vì, như ta sẽ thấy, tất cả các liên kết khác đều có thể quy về thành một tập hợp các liên kết thanh.

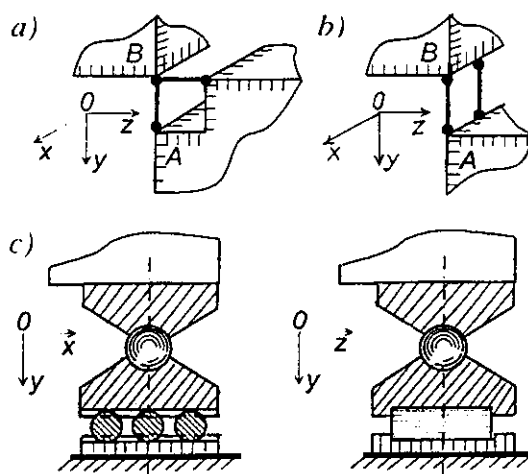


Hình 8.1

## 2. Liên kết cấu tạo bởi hai liên kết thanh đồng phẳng

✦ *Trường hợp hai liên kết thanh đồng quy* (hình 8.2a):

Liên kết khử được hai bậc tự do, cho phép vật thể chuyển vị thẳng theo phương vuông góc với mặt phẳng hai liên kết thanh và xoay được quanh ba trục bất kỳ. Trong liên kết phát sinh phản lực nằm trong mặt phẳng của hai liên kết thanh và đi qua khớp chung. Vì phản lực có phương chưa biết nên thường được phân tích thành hai thành phần theo hai phương nào đó, chẳng hạn theo phương  $z$  và  $y$  trên hình 8.2a.



Hình 8.2

Hai liên kết thanh đồng quy tương đương với gối khớp cầu đặt trên con



lần hình trụ (hình 8.2c).

✦ *Trường hợp hai liên kết thanh song song* (hình 8.2b):

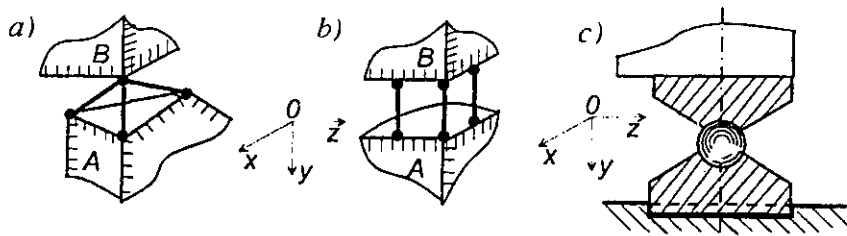
Liên kết khử được chuyển vị thẳng của vật thể dọc theo trục của hai liên kết thanh và khử được chuyển vị xoay trong mặt phẳng của chúng tức là khử được hai bậc tự do. Liên kết cho phép vật thể chuyển vị thẳng theo hai phương vuông góc với trục của hai liên kết thanh và chuyển vị xoay quanh hai trục song song với mặt phẳng của hai liên kết thanh, tức là trục  $x$  và  $y$  trên hình 8.2b. Trong liên kết phát sinh một phản lực có phương song song với trục của hai liên kết thanh nhưng có điểm đặt chưa biết nên có thể đưa về hai thành phần: một lực song song với hai liên kết thanh có điểm đặt xác định và một mômen nằm trong mặt phẳng của hai liên kết thanh.

### 3. Liên kết cấu tạo bởi ba liên kết thanh không đồng phẳng

✦ *Trường hợp ba liên kết thanh không đồng phẳng, đồng quy* (hình 8.3a):

Liên kết khử được ba chuyển vị thẳng của vật thể tức là khử được ba bậc tự do, nhưng cho phép vật thể xoay được quanh ba trục bất kỳ đi qua khớp chung. Trong liên kết phát sinh phản lực đi qua khớp chung nhưng có phương bất kỳ nên được phân tích thành ba thành phần theo ba phương bất kỳ.

Liên kết gồm ba liên kết thanh đồng quy không cùng trong mặt phẳng tương đương với gối khớp cầu cố định (hình 8.3c).



Hình 8.3

✦ *Trường hợp ba liên kết thanh không đồng phẳng, song song* (hình 8.3b):

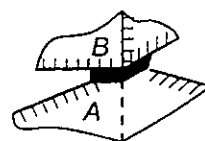
Liên kết khử được chuyển vị thẳng của vật thể dọc theo trục của các liên kết thanh và hai chuyển vị xoay trong hai mặt phẳng tạo thành bởi ba liên kết thanh song song (hai mặt phẳng  $Ozy$  và  $Oxy$  trên hình 8.3b) tức là khử được ba bậc tự do. Vật thể còn lại ba bậc tự do là hai chuyển vị thẳng trong mặt phẳng vuông góc với trục của liên kết thanh và một chuyển vị xoay quanh trục song song với các liên kết thanh (trục  $y$  trên

hình 8.3b). Trong liên kết phát sinh một phản lực có phương song song với trục của các liên kết thanh nhưng có điểm đặt chưa biết. Có thể đưa phản lực này về một điểm xác định nào đó, ta sẽ được ba thành phần phản lực: một thành phần lực song song với trục các liên kết thanh đặt tại điểm xác định và hai thành phần mômen trong hai mặt phẳng tạo thành bởi ba liên kết thanh song song.

#### 4. Liên kết hàn hay gọi là mối hàn

Liên kết hàn (hình 8.4) khử được toàn bộ sáu bậc tự do của vật thể trong không gian. Trong liên kết phát sinh một phản lực có phương và điểm đặt chưa biết.

Có thể đưa phản lực này về một điểm xác định nào đó ta sẽ được sáu thành phần: ba thành phần lực đặt tại điểm xác định hướng theo ba trục của hệ tọa độ bất kỳ trong không gian và ba thành phần mômen xung quanh ba trục của hệ tọa độ đó.



Hình 8.4

Như vậy, một liên kết hàn không gian tương đương với sáu liên kết thanh nếu chúng được bố trí để sao cho có thể khử được sáu bậc tự do. Khi vật thể cố định A là trái đất thì liên kết hàn được gọi là *ngàm không gian*.

Ngoài các liên kết nêu trên, người ta còn có thể cấu tạo nhiều dạng liên kết khác bằng cách tổ hợp các liên kết thanh.

Sau này, khi khảo sát mối quan hệ về số lượng giữa các vật thể và các liên kết, để cho tiện lợi ta sẽ quy đổi các liên kết về liên kết thanh.

#### B. Liên kết phức tạp

Trong thực tế có thể gặp trường hợp liên kết hàn hoặc liên kết khớp cầu (hai thanh đồng phẳng, đồng quy hoặc ba thanh không đồng phẳng, đồng quy) đồng thời cùng nối nhiều vật thể (từ ba vật thể trở lên) với nhau thì liên kết đó được gọi là liên kết *phức tạp*.

Tương tự như trong hệ phẳng, ta gọi *độ phức tạp của liên kết phức tạp là số liên kết đơn giản cùng loại tương đương với liên kết phức tạp đó*.

Độ phức tạp của liên kết phức tạp được xác định theo công thức:

$$p = V - 1, \quad (8.1)$$

trong đó:

$p$  – độ phức tạp;

$V$  – số vật thể quy tụ vào liên kết phức tạp.

## 8.2. Cách nối các vật thể thành một hệ không gian bất biến hình

Tương tự như trong bài toán phẳng, khi khảo sát sự cấu tạo hình học ta cần lần lượt xét điều kiện cần và điều kiện đủ.

### A. Điều kiện cần

#### 1. Hệ bất kỳ

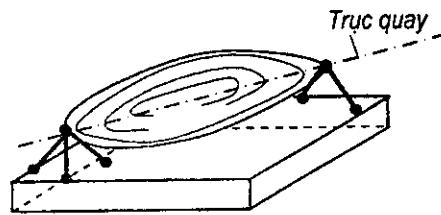
Giả sử hệ không gian được cấu tạo bởi  $V$  vật thể, trong số đó có  $V_1$  vật thể chỉ có hai khớp cầu ở hai đầu và được nối với nhau bằng các liên kết quy về  $T$  liên kết thanh.

Chú ý là một vật thể bất kỳ trong không gian có sáu bậc tự do. Một vật thể chỉ có hai khớp cầu ở hai đầu (hình 8.5) có thể quay xung quanh trục đi qua hai khớp cầu, chuyển động quay đó không ảnh hưởng gì đến sự cấu tạo chung của toàn hệ nên không nhất thiết phải khử. Do đó, vật thể chỉ có hai khớp cầu ở hai đầu có năm bậc tự do.

Nếu quy ước chọn một vật thể làm vật thể bất động thì muốn nối các vật thể còn lại vào vật thể bất động ta cần phải khử được:

$$6(V-1-V_1) + 5V_1 = 6(V-1) - V_1$$

bậc tự do. Đó là yêu cầu.



Hình 8.5

Về khả năng, hệ có số liên kết tương đương với  $T$  liên kết thanh nên có thể khử được  $T$  bậc tự do.

Cũng lập luận tương tự như ở chương 1, sau khi so sánh số bậc tự do có thể khử được (khả năng) với số bậc tự do cần khử (yêu cầu) ta có điều kiện cần:

$$n = T - 6(V-1) + V_1 \geq 0. \quad (8.2)$$

- ❖ Nếu  $n = 0$  : hệ đủ liên kết và có khả năng bất biến hình nên cần xét điều kiện đủ. Nếu điều kiện đủ thỏa mãn thì hệ là tĩnh định.
- ❖ Nếu  $n > 0$  : hệ thừa liên kết và có khả năng bất biến hình nên cần xét

điều kiện đủ. Nếu điều kiện đủ thỏa mãn thì hệ là siêu tĩnh.

Để cho đơn giản, trong nhiều trường hợp, ta có thể xem vật thể chỉ có hai khớp cầu ở hai đầu như là một liên kết thanh.

## 2. Hệ nối với trái đất

Giả sử hệ không gian đang xét có  $V$  vật thể, trong số đó có  $V_I$  vật thể chỉ có hai khớp cầu ở hai đầu, được nối với nhau bằng các liên kết quy về  $T$  liên kết thanh và nối với đất bằng các liên kết tựa tương đương  $C$  liên kết thanh.

Coi trái đất là vật thể bất động, muốn nối các vật thể đó với nhau và nối với trái đất ta cần phải khử được  $6(V - V_I) + 5V_I = 6V - V_I$  bậc tự do.

Xét về khả năng, số bậc tự do có thể khử được là  $T + C$ .

So sánh số bậc tự do có thể khử được với số bậc tự do cần khử ta suy ra điều kiện cần:

$$n = T + C - 6V + V_I \geq 0. \quad (8.3)$$

Ý nghĩa của công thức này cũng tương tự như của (8.2).

## 3. Hệ dàn không gian

*Dàn không gian là hệ được cấu tạo bởi các thanh thẳng, hai đầu có khớp cầu.*

Có thể dùng công thức (8.2) và (8.3) để khảo sát điều kiện cần của hệ dàn nhưng khi đó cần phải chú ý đến độ phức tạp của các liên kết khớp cầu. Để thuận tiện cho việc áp dụng ta sẽ thiết lập điều kiện cần riêng cho hệ dàn.

✦ *Dàn không nối với trái đất.* Giả sử trong hệ có  $T$  thanh,  $M$  mắt. Quan niệm một tam giác khớp của hệ là vật thể bất động, như vậy trong hệ còn lại  $M - 3$  mắt cần nối vào vật thể bất động và có  $T - 3$  thanh để nối. Trong không gian, mỗi điểm (mắt) có ba bậc tự do nên số bậc tự do cần khử là  $3(M - 3)$ . Số bậc tự do có thể khử được là  $T - 3$ . So sánh các số liệu này ta suy ra điều kiện cần:

$$n = T - 3 - 3(M - 3) \geq 0,$$

hay

$$n = T + 6 - 3M \geq 0. \quad (8.4)$$

Ý nghĩa của công thức này tương tự như của (8.2).

✦ *Dàn nối với trái đất.* Giả sử trong hệ có  $T$  thanh,  $M$  mắt và được nối với trái đất bằng các liên kết tựa tương đương  $C$  liên kết thanh. Coi trái đất là vật thể bất động và cần nối  $M$  mắt vào vật thể đó. Số bậc tự do cần phải khử là  $3M$  còn số bậc tự do có thể khử được là  $T+C$ . Sau khi so sánh các số liệu này ta suy ra điều kiện cần

$$n = T + C - 3M \geq 0. \quad (8.5)$$

Ý nghĩa của công thức này cũng tương tự như của (8.2).

### B. Điều kiện đủ

Sau khi điều kiện cần được thỏa mãn, ta xét điều kiện đủ.

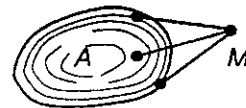
*Điều kiện đủ để nối các vật thể thành một hệ bất biến hình là các liên kết phải được bố trí hợp lý.*

Để xác nhận khả năng bố trí hợp lý của các liên kết, ta lần lượt khảo sát một số trường hợp sau:

#### 1. Cách nối một mắt vào một vật thể

Xét vật thể  $A$ , giả sử cần nối mắt  $M$  vào vật thể  $A$  (hình 8.6) để tạo thành hệ bất biến hình.

Theo điều kiện cần, để nối mắt  $M$  vào vật thể  $A$  cần phải khử được ba bậc tự do tức là phải dùng ba liên kết thanh. Điều kiện đủ là *ba thanh không được đồng phẳng*. Thật vậy, nếu ba thanh đồng phẳng thì ba thanh đó không có khả năng ngăn cản được chuyển vị của mắt  $M$  theo phương vuông góc với mặt phẳng đó.



Hình 8.6

*Ba thanh không đồng phẳng để nối một mắt vào một vật thể được gọi là bộ ba.*

Tương tự như bộ đôi trong bài toán phẳng, bộ ba trong bài toán không gian có tính chất sau:

*Bộ ba không làm thay đổi tính chất động học của hệ.*

Như vậy, có thể vận dụng tính chất này để phát triển hoặc thu hẹp hệ khảo sát.

**Ví dụ 8.1.** Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ trên hình 8.7.

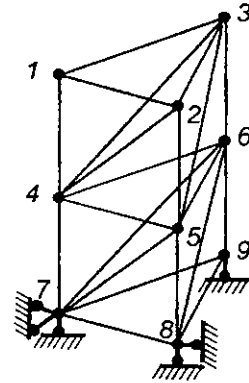
Hệ đã cho thuộc loại hệ dàn nối với đất, trong đó  $T = 21$ ;  $M = 9$ ;  $C = 6$ .

Theo (8.4):  $n = 2I + 6 - 3.9 = 0$ , hệ đủ liên kết.

Để xét điều kiện đủ ta sử dụng tính chất của bộ ba, thu hẹp dần hệ khảo sát. Loại khỏi hệ bộ ba gồm ba thanh không đồng phẳng quy tụ tại mắt 1. Hệ còn lại vẫn không thay đổi tính chất động học. Trong hệ này, tại mắt 2 chỉ còn lại ba thanh không đồng phẳng tức là bộ ba. Loại bỏ bộ ba quy tụ tại mắt 2 ta sẽ được hệ còn lại không thay đổi tính chất động học.

Tiếp đó, lần lượt loại bỏ các bộ ba theo thứ tự các mắt 3, 4, 5, 6, 9, 8, 7.

Cuối cùng, còn lại trái đất là hệ bất biến hình nên hệ đã cho ban đầu là bất biến hình.



Hình 8.7

## 2. Cách nối hai vật thể

Theo điều kiện cần, để nối vật thể I vào vật thể II được xem là bất động, ta cần phải có số liên kết tương đương với sáu liên kết thanh.

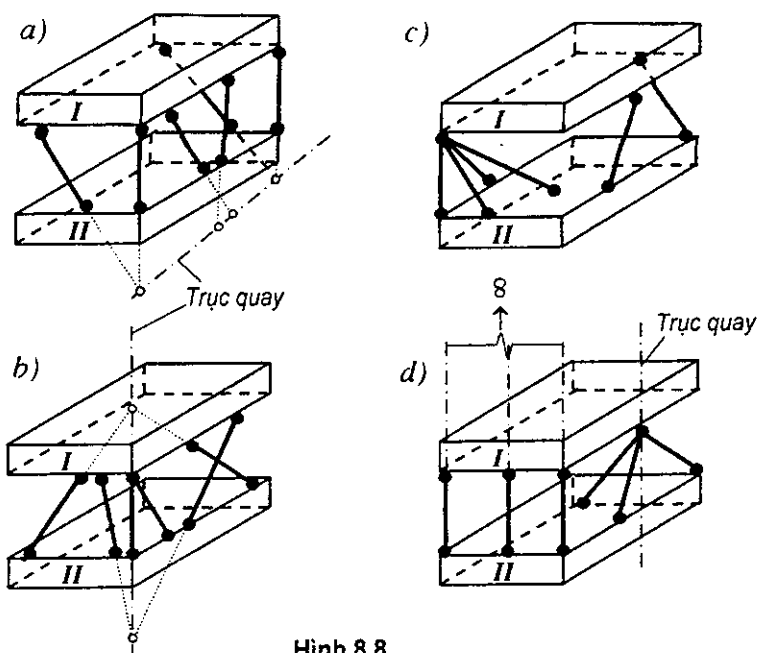
*Điều kiện đủ để nối hai vật thể thành một hệ bất biến hình bằng sáu liên kết thanh là các liên kết thanh đó phải được bố trí sao cho:*

- ❖ Sáu liên kết thanh không được cùng cắt một đường thẳng.
- ❖ Trong số sáu liên kết thanh, không được có quá ba thanh đồng quy ở một điểm.
- ❖ Trong số sáu liên kết thanh, không được có quá hai thanh đồng quy (hoặc song song) đồng phẳng.

Trên hình 8.8 giới thiệu cách nối hai vật thể không thỏa mãn điều kiện đủ.

Trong trường hợp sáu liên kết thanh cùng cắt một đường thì tùy theo cách sắp xếp các thanh, vật thể I có thể quay vô cùng bé (hình 8.8a) hoặc hữu hạn (hình 8.8b) so với vật thể II quanh đường thẳng đó mà không có liên kết nào cản trở. Như vậy hệ sẽ biến hình tức thời (hình 8.8a) hoặc biến hình (hình 8.8b).

Trong trường hợp có quá ba thanh đồng quy ở một điểm (hệ trên hình 8.8c có bốn thanh đồng quy) thì các liên kết đồng quy này chỉ có khả năng khử được tối đa ba bậc tự do. Số thanh còn lại sẽ ít hơn ba cho nên không thể khử được ba bậc tự do còn lại. Như vậy hệ sẽ biến hình.



Hình 8.8

Trong trường hợp có quá hai thanh đồng phẳng đồng quy hoặc song song, chẳng hạn có ba thanh song song như trên hình 8.8d thì ba thanh này chỉ khử được tối đa là hai bậc tự do. Số thanh còn lại ít hơn bốn bậc tự do còn lại của hệ. Như vậy hệ sẽ biến hình.

### 3. Trường hợp tổng quát

Trong trường hợp tổng quát, khi phân tích điều kiện đủ ta có thể vận dụng tính chất của bộ ba hoặc cách nối hai vật thể đã biết ở trên để phát triển từng vật thể đến mức tối đa cho phép. Nhờ vậy ta có thể đưa hệ có nhiều vật thể về hệ có số vật thể ít hơn.

- ❖ Nếu đưa về một vật thể thì kết luận hệ đã cho là bất biến hình.
- ❖ Nếu đưa về hai vật thể thì vận dụng điều kiện nối hai vật thể đã xét ở trên để phân tích.

Nói chung, phần lớn các hệ không gian gập trong thực tế đều có thể dùng biện pháp nói trên để phân tích sự cấu tạo hình học. Trong trường hợp không vận dụng được biện pháp trên, ta áp dụng các phương pháp khác để phân tích, chẳng hạn phương pháp tải trọng bằng không đã nghiên cứu trong chương 2.

Cũng như trong bài toán phẳng, *tiêu chí của phương pháp tải trọng bằng*

không trong bài toán không gian được phát biểu như sau:

*Khi không có tải trọng tác dụng trên hệ:*

- ❖ nếu phản lực và nội lực trong toàn bộ hệ đều duy nhất bằng không thì hệ là bất biến hình;
- ❖ nếu phản lực và nội lực trong toàn bộ hệ hoặc trong một bộ phận nào đó của hệ là vô định thì hệ không bất biến hình.

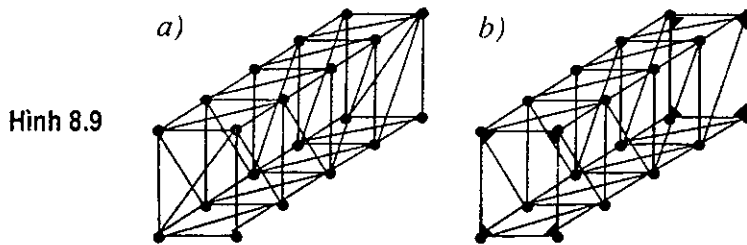
Phương pháp này đơn giản và có hiệu quả khi áp dụng để phân tích sự cấu tạo của các hệ dàn không gian. Trong mục 8.3 dưới đây, sau khi nghiên cứu cách xác định nội lực trong hệ không gian ta sẽ tìm hiểu cách vận dụng phương pháp này (xem ví dụ 8.4).

Trong thực tế người ta cũng áp dụng khá phổ biến những hệ dàn không gian đặc biệt gọi là *dàn lưới*.

*Dàn lưới là dàn không gian được hình thành theo các đa diện lồi khép kín, các thanh đều nằm trong các mặt biên, mỗi mặt biên là một hệ phẳng bất biến hình.*

Năm 1813, A.L. Cauchy (1789 -1857) đã chứng minh:

*Các loại dàn lưới thỏa mãn định nghĩa nói trên đều là những hệ bất biến hình.*



Dựa vào kết luận của Cauchy ta dễ dàng phân tích được sự cấu tạo của các hệ dàn không gian. Ví dụ, hệ dàn cầu có đường xe chạy trên (hình 8.9a) được hình thành theo đa diện lồi có sáu mặt biên: hai mặt đứng theo phương dọc cầu là bộ phận chịu lực chính, hai mặt ngang là bộ phận giằng chịu lực gió còn hai mặt đứng vuông góc với nhịp cầu là bộ phận chống xoắn. Các mặt biên đều bất biến hình nên hệ này là hệ dàn lưới và bất biến hình. Trong hệ dàn cầu có đường xe chạy dưới (hình 8.9b) người ta thay hai mặt biên vuông góc với nhịp cầu bằng hai cổng cầu dưới dạng khung. Hệ này cũng là bất biến hình thừa liên kết tức là siêu tĩnh.



### 8.3. Cách xác định phản lực và nội lực trong hệ thanh không gian tĩnh định

Về nguyên tắc, phương pháp xác định phản lực và nội lực trong hệ không gian cũng giống như trong hệ phẳng nhưng có phần phức tạp hơn. Trong mục này ta chỉ nghiên cứu cách tính hệ không gian chịu tải trọng bất động. Sau khi biết cách tính với tải trọng bất động ta có thể dễ dàng tính được hệ không gian chịu tải trọng di động theo nguyên tắc đã biết trong chương 3.

Nếu hệ thanh không gian là bất biến hình và tĩnh định thì có thể vận dụng phương pháp mặt cắt và chỉ sử dụng các phương trình cân bằng tĩnh học cũng đủ để xác định phản lực và nội lực trong hệ. Tại mỗi mặt cắt, có thể lập được sáu phương trình cân bằng. Các phương trình này thường được mô tả theo nhiều nhóm khác nhau, trong đó có hai nhóm thường được ưa dùng:

1) Ba phương trình hình chiếu lên ba trục  $X, Y, Z$  và ba phương trình mômen đối với ba trục  $x, y, z$  :

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0; \quad \sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0.$$

$X, Y, Z$  là ba trục bất kỳ trong không gian miễn là không song song hoặc cùng đồng phẳng, các trục lấy mômen  $x, y, z$  không nhất thiết phải trùng với các trục chiếu  $X, Y, Z$ , có thể lấy bất kỳ miễn là chúng không song song hoặc cùng đồng phẳng.

2) Sáu phương trình cân bằng mômen đối với sáu trục:

$$\sum M_1 = 0; \quad \sum M_2 = 0; \quad \sum M_3 = 0; \quad \sum M_4 = 0; \quad \sum M_5 = 0; \quad \sum M_6 = 0,$$

trong đó  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  là sáu trục chọn tùy ý với điều kiện:

- ❖ Sáu trục không được cùng cắt một đường thẳng.
- ❖ Trong số sáu trục đó không có quá ba trục song song.
- ❖ Trong số sáu trục đó nếu đã có ba trục đồng quy tại một điểm thì ba trục còn lại không được song song.

Nếu các trục chọn không thỏa mãn các điều kiện nêu trên thì có thể xảy ra trường hợp phương trình cân bằng thỏa mãn nhưng vật thể vẫn không nằm trong trạng thái cân bằng.

Trong các bài toán cụ thể, ta cần vận dụng linh hoạt các phương trình cân bằng để xác định phản lực trong các liên kết nối với trái đất, tiếp đó xác định nội lực trong hệ.

Dưới đây ta sẽ tìm hiểu kỹ hơn về cách xác định nội lực trong hệ không gian.

## A. Hệ không gian bất kỳ

Trong trường hợp tổng quát, nội lực tại một tiết diện thanh trong hệ không gian bao gồm sáu thành phần (hình 8.10):

- Mômen uốn xung quanh trục  $x$ :  $M_x$ .    • Lực cắt theo phương trục  $x$ :  $Q_x$ .
- Mômen uốn xung quanh trục  $y$ :  $M_y$ .    • Lực cắt theo phương trục  $y$ :  $Q_y$ .
- Mômen xoắn xung quanh trục  $z$ :  $M_z$ .    • Lực dọc theo phương trục  $z$ :  $N_z$ .

Các trục  $x, y$  là hệ trục quán tính chính trung tâm của tiết diện, còn trục  $z$  hướng theo phương tiếp tuyến với trục thanh

Khi xác định nội lực tại tiết diện bất kỳ  $k$ , ta cần thực hiện mặt cắt qua tiết diện  $k$ . Mặt cắt phải chia hệ thành hai phần riêng biệt: phần trái và phần phải.

Lấy tổng mômen của các lực tác dụng trên phần trái

(hoặc phần phải) đối với trục  $x, y$  và  $z$  lần lượt ta sẽ được giá trị của  $M_x, M_y$  và  $M_z$ .

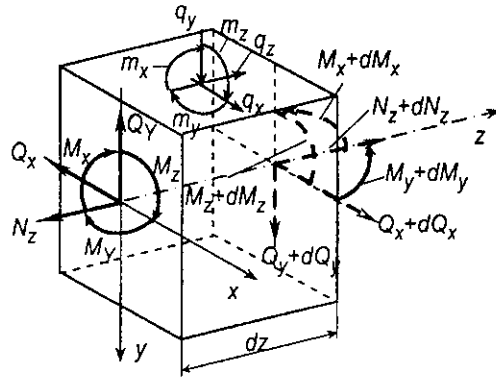
Lấy tổng hình chiếu của các lực tác dụng trên phần trái (hoặc phần phải) lên các trục  $x, y, z$  lần lượt ta sẽ được giá trị của  $Q_x, Q_y$  và  $N_z$ .

Chiều dương của các thành phần nội lực quy ước chọn như trên hình 8.10.

Nếu gọi  $q_y, q_x, q_z, m_x, m_y, m_z$  là cường độ của các ngoại lực tác dụng dưới dạng lực phân bố và mômen phân bố với quy ước chiều dương như trên hình 8.10 thì giữa các đại lượng này và các thành phần nội lực có sự liên hệ vi phân như sau:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_x}{dz} + q_x &= 0; & \frac{dQ_y}{dz} + q_y &= 0; & \frac{dN_z}{dz} + q_z &= 0; \\ \frac{dM_x}{dz} - Q_y - m_x &= 0; & \frac{dM_y}{dz} - Q_x - m_y &= 0; & \frac{dM_z}{dz} - m_z &= 0; \end{aligned} \quad (8.6)$$

Khi vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ không gian ta cũng thực hiện theo những nguyên tắc đã biết trong Sức bền vật liệu. Tuy nhiên, cần chú ý vào



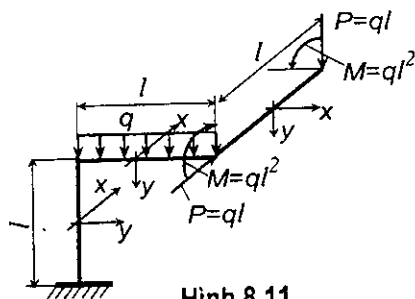
Hình 8.10

các liên hệ vi phân (8.6) ta có thể suy ra các nhận xét để vẽ nhanh các biểu đồ nội lực tương tự như đã trình bày trong chương 2.

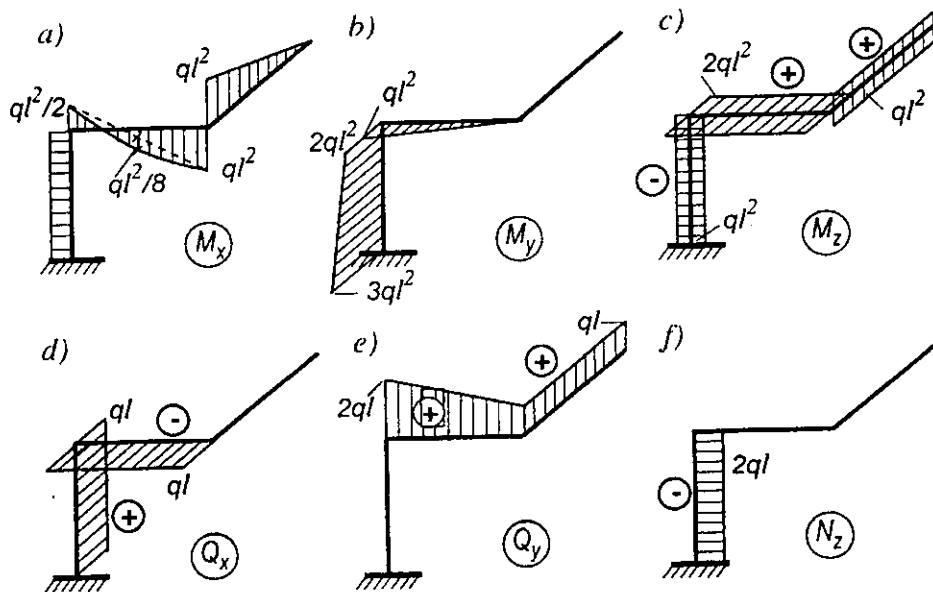
Ta sẽ ôn lại cách vẽ biểu đồ qua ví dụ 8.2 dưới đây.

**Ví dụ 8.2.** Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ khung không gian chịu tải trọng như trên hình 8.11.

Kết quả tìm được như trên hình 8.12. Để phân biệt biểu đồ mômen xoắn với các biểu đồ khác ta có thể sử dụng cách biểu thị quy ước như sau: các tung độ của biểu đồ  $M_z$  được dựng vuông góc và chia thành hai phần, đặt về hai phía của đường chuẩn (hình 8.12c).



Hình 8.11



Hình 8.12

### B. Hệ dàn không gian

Để xác định nội lực trong hệ dàn không gian ta có thể vận dụng các phương pháp đã trình bày trong chương 2 như phương pháp mặt cắt đơn giản, phương pháp mặt cắt phối hợp hay phương pháp tách mắt.

Nếu thực hiện được mặt cắt không quá sáu thanh chưa biết nội lực thì có thể sử dụng phương pháp mặt cắt đơn giản. Với mỗi mặt cắt, nếu vận

dụng khéo léo các phương trình cân bằng thì có thể xác định được nội lực trong các thanh bị cắt theo sáu phương trình trong đó có nhiều phương trình độc lập.

Nếu chỉ có thể thực hiện mặt cắt qua hơn sáu thanh chưa biết nội lực mới chia hệ thành hai phần độc lập thì nói chung với một mặt cắt ta không thể xác định ngay được các nội lực đó. Trong trường hợp này cần áp dụng phương pháp mặt cắt phối hợp. Nguyên tắc thực hiện cũng tương tự như trong bài toán phẳng.

Trong thực hành, phương pháp tách mắt thường được ưa dùng khi tính hệ dàn không gian. Theo phương pháp này ta tách từng mắt của dàn để khảo sát cân bằng. Ứng với mỗi mắt của dàn ta lập được ba phương trình cân bằng độc lập. Vì hệ là tĩnh định nên số phương trình cân bằng độc lập tìm được sẽ vừa đủ để xác định số nội lực cần tìm trong hệ.

Để giảm nhẹ khối lượng giải hệ phương trình, khi sử dụng phương pháp tách mắt ta cần chú ý:

- ✦ Nên lần lượt tách các mắt theo thứ tự để sao cho tại mỗi mắt chỉ có ba thanh không đồng phẳng chưa biết nội lực. Lúc này tại mỗi mắt ta sẽ lập được ba phương trình cân bằng chỉ chứa ba nội lực chưa biết nên có thể xác định ngay được các nội lực đó.
- ✦ Khi khảo sát cân bằng của mỗi mắt, để tìm ngay được nội lực chưa biết trong thanh thứ nhất ta nên dùng phương trình cân bằng hình chiếu lên trục vuông góc với hai thanh còn lại chưa biết nội lực hoặc dùng phương trình cân bằng mômen đối với trục không đi qua mắt nhưng cắt qua hai thanh còn lại chưa biết nội lực. Với cách làm như vậy sẽ không phải giải hệ phương trình.

Ngoài ra, từ phương pháp tách mắt ta suy ra hai nhận xét sau:

- \* Nếu tại mắt có ba thanh không đồng phẳng quy tụ và không có tải trọng đặt ở mắt thì lực dọc trong tất cả ba thanh đó đều bằng không.
- \* Nếu tại mắt có  $n$  thanh quy tụ, trong đó  $n-1$  thanh nằm trong cùng một mặt phẳng thì lực dọc trong thanh còn lại bằng không khi ở mắt không có tải trọng tác dụng hoặc khi tải trọng tác dụng trong mặt phẳng của  $n-1$  thanh kể trên.

Với hai nhận xét đó ta có thể dễ phát hiện những thanh có nội lực bằng không. Sau khi loại bỏ các thanh có nội lực bằng không, sơ đồ tính của hệ

sẽ đơn giản hơn, tạo điều kiện thuận lợi cho việc xác định nội lực trong các thanh còn lại.

**Ví dụ 8.3.** Xác định nội lực trong các thanh của dàn không gian trên hình 8.13 khi dàn chịu lực  $P=100$  kN nằm trong mặt phẳng 1-3-7-5, vuông góc với trục  $z$ .

Chọn hệ trục tọa độ như trên hình vẽ và gọi  $x, y, z$  là hình chiếu của các thanh đang xét lên các trục tương ứng. Chiều dài  $l$  và cosin chỉ phương của từng thanh trong dàn được xác định theo các công thức đã biết trong Hình học giải tích.

$$l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \cos(\bar{x}, \bar{l}) = \frac{x}{l}; \quad \cos(\bar{y}, \bar{l}) = \frac{y}{l}; \quad \cos(\bar{z}, \bar{l}) = \frac{z}{l}.$$

Để xác định nội lực trong các thanh của dàn không gian ta vận dụng phương pháp tách mắt, bắt đầu tách từ mắt 9 có ba nội lực chưa biết. Để cho tiện lợi và đỡ nhầm lẫn ta lập bảng tính (bảng 8.1).

Tách mắt 9, giả thiết nội lực trong các thanh quy tụ vào mắt đều là lực kéo và lập phương trình cân bằng hình chiếu các lực lên ba trục, ta có:

$$\sum X = S_{9-6} \cos(\bar{x}, \bar{l}_{9-6}) + S_{9-8} \cos(\bar{x}, \bar{l}_{9-8}) + S_{9-7} \cos(\bar{x}, \bar{l}_{9-7}) + P \cos(\bar{x}, \bar{P}) = 0;$$

$$\sum Y = S_{9-6} \cos(\bar{y}, \bar{l}_{9-6}) + S_{9-8} \cos(\bar{y}, \bar{l}_{9-8}) + S_{9-7} \cos(\bar{y}, \bar{l}_{9-7}) + P \cos(\bar{y}, \bar{P}) = 0;$$

$$\sum Z = S_{9-6} \cos(\bar{z}, \bar{l}_{9-6}) + S_{9-8} \cos(\bar{z}, \bar{l}_{9-8}) + S_{9-7} \cos(\bar{z}, \bar{l}_{9-7}) + P \cos(\bar{z}, \bar{P}) = 0.$$

Xác định các đại lượng trong hệ phương trình cân bằng:

- Thanh 9-6: Độ dài các hình chiếu lên các trục tọa độ lần lượt là:

$$x = -2; \quad y = 2; \quad z = -5 \quad \text{nên}$$

$$l_{9-6} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-5)^2} = 5,75 \text{ m.}$$

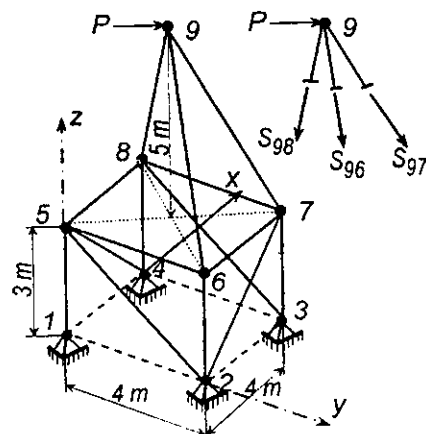
Các cosin chỉ phương:

$$\cos(\bar{x}, \bar{l}_{9-6}) = \frac{x}{l_{9-6}} = \frac{-2}{5,75} = -0,348;$$

$$\cos(\bar{y}, \bar{l}_{9-6}) = \frac{y}{l_{9-6}} = \frac{2}{5,75} = 0,348;$$

$$\cos(\bar{z}, \bar{l}_{9-6}) = \frac{z}{l_{9-6}} = \frac{-5}{5,75} = -0,87.$$

- Thanh 9-8: Từ hình 8.13 ta thấy



Hình 8.13

hình chiếu lên ba trục tọa độ của thanh là  $x = 2$ ;  $y = -2$ ;  $z = -5$ .

Do đó:

$$l_{9-8} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = 5,75 \text{ m}; \quad \cos(\bar{x}, \bar{l}_{9-8}) = \frac{x}{l_{9-8}} = \frac{2}{5,75} = 0,348;$$

$$\cos(\bar{y}, \bar{l}_{9-8}) = \frac{y}{l_{9-8}} = \frac{-2}{5,75} = -0,348; \quad \cos(\bar{z}, \bar{l}_{9-8}) = \frac{z}{l_{9-8}} = \frac{-5}{5,75} = -0,87.$$

- Thanh 9-7: Cũng thực hiện tương tự, ta được:

$$\cos(\bar{x}, \bar{l}_{9-7}) = 0,348; \quad \cos(\bar{y}, \bar{l}_{9-7}) = 0,348; \quad \cos(\bar{z}, \bar{l}_{9-7}) = -0,87.$$

- Lực P: Các cosin chỉ phương:

$$\cos(\bar{x}, \bar{P}) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos(\bar{y}, \bar{P}) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos(\bar{z}, \bar{P}) = 0.$$

**Bảng 8.1**

Thanh	Hình chiếu (m)			$x^2$	$y^2$	$z^2$	l (m)	Cosin chỉ phương			Nội lực (kN)
	x	y	z					$\cos(\bar{x}, \bar{l})$	$\cos(\bar{y}, \bar{l})$	$\cos(\bar{z}, \bar{l})$	
9-6	-2	2	-5	4	4	25	5,75	-0,348	0,348	-0,870	101,5
9-8	2	-2	-5	4	4	25	5,75	0,348	-0,348	-0,870	101,5
9-7	2	2	-5	4	4	25	5,75	0,348	0,348	-0,870	-203,0
6-5	0	-4	0	0	16	0	4,00	0,000	-1,000	0,000	-35,4
6-7	4	0	0	16	0	0	4,00	1,000	0,000	0,000	-35,4
6-2	0	0	-3	0	0	9	3,00	0,000	0,000	-1,000	88,4
7-8	0	-4	0	0	16	0	4,00	0,000	-1,000	0,000	70,7
7-2	-4	0	-3	16	0	9	5,00	-0,800	0,000	-0,600	-132,5
7-3	0	0	-3	0	0	9	3,00	0,000	0,000	-1,000	-256,3
8-5	-4	0	0	16	0	0	4,00	-1,000	0,000	0,000	-35,3
8-4	0	0	-3	0	0	9	3,00	0,000	0,000	-1,000	167,8
8-3	0	4	-3	0	16	9	5,00	0,000	0,800	-0,600	-132,6
5-4	4	0	-3	16	0	9	5,00	0,800	0,000	-0,600	44,1
5-1	0	0	-3	0	0	9	3,00	0,000	0,000	-1,000	-52,8
5-2	0	4	-3	0	16	9	5,00	0,000	0,800	-0,600	44,1

Thay các trị số vừa tính được vào hệ ba phương trình cân bằng của mắt 9 ta có:

$$\sum X = S_{9-6}(-0,348) + S_{9-8}(0,348) + S_{9-7}(0,348) + 100 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 ;$$

$$\sum Y = S_{9-6}(0,348) + S_{9-8}(-0,348) + S_{9-7}(0,348) + 100 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 ;$$

$$\sum Z = S_{9-6}(-0,87) + S_{9-8}(-0,87) + S_{9-7}(-0,87) = 0 .$$

Từ đó suy ra:

$$S_{9-6} = 101,5 \text{ kN}; \quad S_{9-8} = 101,5 \text{ kN}; \quad S_{9-7} = -203 \text{ kN}.$$

Các dấu tìm được chứng tỏ nội lực trong thanh 9-6 và 9-8 phù hợp với chiều giả thiết (lực kéo) còn nội lực trong thanh 9-7 ngược với chiều giả thiết (lực nén).

Sau khi tách mắt 9 ta chuyển sang tách mắt 6, lúc đó chỉ còn ba ẩn.

Cũng lần lượt thực hiện như thế với các mắt 7, 8, 5 ta sẽ có được nội lực trong tất cả các thanh của dàn. Quá trình tính toán được tiếp tục thực hiện trên bảng 8.1.

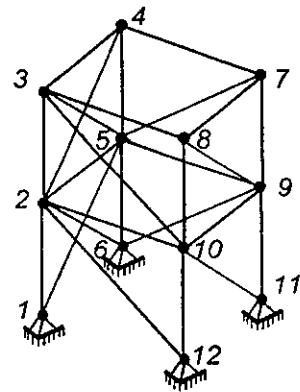
**Ví dụ 8.4.** Vận dụng phương pháp tải trọng bằng không để xét cấu tạo hình học của hệ trên hình 8.14.

Đối với hệ đã cho, ta có:  $M = 12$ ;  $C = 12$ ;  $T = 24$ . Theo (8.5) ta thấy:

$$n = 24 + 12 - 3.12 = 0.$$

Vậy hệ đủ liên kết.

Để khảo sát điều kiện đủ, trước tiên ta xét mắt 8 và thấy ngay nội lực trong thanh 3-8 bằng không (mắt 8 có bốn thanh trong đó có ba thanh đồng phẳng cho nên khi mắt không chịu lực thì thanh 3-8 không cùng trong mặt phẳng của ba thanh nói trên sẽ có nội lực bằng không). Tiếp đó, lần lượt xét các mắt 3, 4, 7 của hệ, ta thấy tại mỗi mắt này (sau khi đã loại bỏ các thanh có nội lực bằng không) chỉ có ba thanh đồng quy không đồng phẳng và không chịu tải trọng nên nội lực trong tất cả các thanh quy tụ vào các mắt 3, 4, 7 đều bằng không. Chuyển sang mắt 10, sau khi đã loại bỏ các thanh có nội lực bằng không, ta thấy mắt này còn lại bốn thanh trong đó có ba thanh đồng phẳng nên thanh không đồng phẳng 2-10 sẽ có nội lực bằng không. Tiếp đó, lần lượt xét các mắt 2, 5, 9 ta cũng dễ dàng nhận thấy nội lực trong các thanh quy tụ vào các mắt đó đều bằng không.



Hình 8.14

Như vậy, khi dàn không chịu tải trọng, nội lực trong tất cả các thanh của dàn đều duy nhất bằng không. Kết luận: hệ bất biến hình.

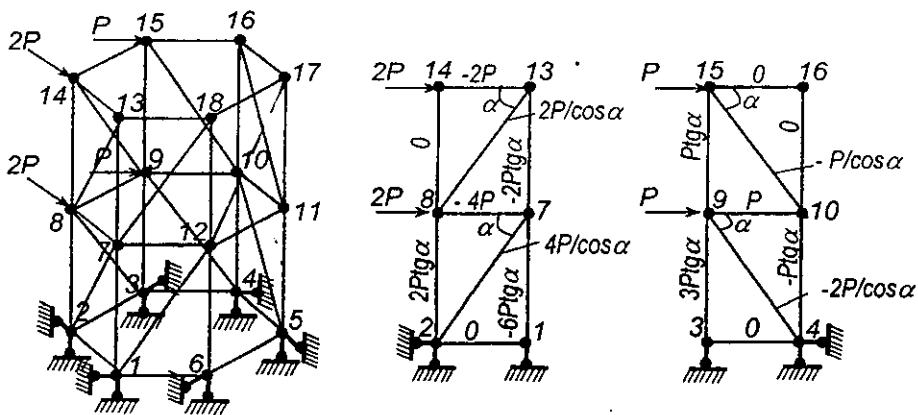
Qua ví dụ này ta thấy: sử dụng phương pháp tải trọng bằng không để khảo sát cấu tạo hình học cho hệ dàn không gian rất tiện lợi.

### 8.4. Cách phân tích dàn không gian thành những dàn phẳng

Trong trường hợp dàn không gian gồm các dàn phẳng bất biến hình ghép lại với nhau thì có thể tính toán đơn giản hơn bằng cách phân tích dàn thành những dàn phẳng để tính riêng biệt. Cách phân tích được thực hiện trên cơ sở nhận xét sau:

*Trong dàn không gian, nếu tải trọng chỉ tác dụng trong mặt phẳng của một dàn phẳng bất biến hình nào đó và cân bằng với nhau hoặc cân bằng với các phản lực của hệ trong mặt phẳng đó thì nội lực chỉ phát sinh trong những thanh thuộc dàn phẳng chịu tải trọng còn các thanh khác của dàn không gian không nằm trong mặt phẳng đó sẽ có nội lực bằng không.*

Để làm ví dụ, ta tìm hiểu cách phân tích dàn không gian trên hình 8.15a.



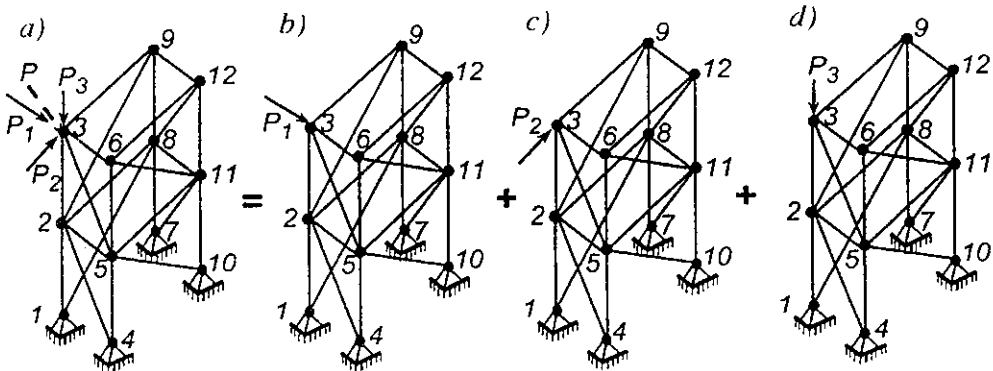
Hình 8.15

Dàn này có các mặt biên là những dàn phẳng bất biến hình, tải trọng tác dụng trong mặt phẳng của các dàn biên 1-2-14-13 và 3-15-16-4. Như vậy, để tính dàn không gian đã cho ta chỉ cần tính hai dàn phẳng độc lập. Các nội lực tìm được (ghi trên hình 8.15b và c) trong các thanh của hai dàn phẳng này cũng chính là nội lực trong các thanh tương ứng của dàn không



gian. Nội lực trong các thanh khác nằm ngoài hai mặt phẳng nói trên đều bằng không.

*Nếu tải trọng tác dụng trên dàn không gian có phương bất kỳ thì có thể phân tích tải trọng thành các thành phần nằm trong từng mặt phẳng để tính. Ví dụ với hệ dàn trên hình 8.16a, ta có thể phân tích lực  $P$  thành ba thành phần  $P_1$ ,  $P_2$  và  $P_3$ . Thành phần  $P_1$  (hình 8.16b) chỉ gây ra nội lực trong dàn phẳng 1-3-6-4 còn thành phần  $P_2$  (hình 8.16c) chỉ gây ra nội lực trong dàn phẳng 1-3-9-7. Thành phần  $P_3$  (hình 8.16d) chỉ gây ra nội lực trong hai thanh 1-2 và 2-3. Cũng có thể xem thành phần  $P_3$  như lực tác dụng trong dàn phẳng 1-3-6-4 hoặc trong dàn phẳng 1-3-9-7. Theo nguyên lý cộng tác dụng, nội lực trong thanh bất kỳ của dàn không gian do tải trọng  $P$  gây ra là tổng các nội lực trong thanh đó do từng thành phần  $P_1$ ,  $P_2$  và  $P_3$  tác dụng riêng rẽ gây ra.*



Hình 8.16

## 8.5. Cách xác định chuyển vị trong hệ thanh không gian

Cách xác định chuyển vị trong hệ thanh không gian cũng được thực hiện theo những nguyên tắc đã trình bày trong chương 4. Tuy nhiên, trong hệ không gian có nhiều thành phần nội lực và biến dạng hơn trong hệ phẳng nên cần bổ sung các số hạng mang yếu tố không gian trong các công thức xác định chuyển vị.

### 1. Xác định chuyển vị theo thế năng biến dạng dàn hoi

Để xác định chuyển vị trong hệ thanh không gian ta có thể áp dụng trực tiếp biểu thức thế năng hoặc áp dụng định lý Castigliano như đã trình bày

trong mục 4.3 chương 4. Trong hệ không gian gồm các thanh thẳng và thanh cong có độ cong nhỏ, thay thế cho công thức (4.12), ta có biểu thức thế năng biến dạng của hệ như sau:

$$U = \sum \int \frac{M_x^2 ds}{2EI_x} + \sum \int \frac{M_y^2 ds}{2EI_y} + \sum \int \frac{M_z^2 ds}{2GI_z} + \sum \int \frac{N_z^2 ds}{2EA} + \sum \int \nu_x \frac{Q_x^2 ds}{2GA} + \sum \int \nu_y \frac{Q_y^2 ds}{2GA}, \quad (8.7)$$

trong đó:

$M_x, M_y, M_z, N_z, Q_x, Q_y$  – các biểu thức giải tích của các thành phần nội lực đã được giải thích trên hình 8.10;

$\nu_x$  và  $\nu_y$  – các hệ số điều chỉnh kể đến sự phân bố không đều của ứng suất tiếp trên tiết diện, theo phương  $x$  và phương  $y$ .

$I_x, I_y$  – mômen quán tính của tiết diện đối với các trục chính trung tâm  $x$  và  $y$ ;

$I_z$  – mômen quán tính của tiết diện khi xoắn được xác định như sau:

❖ tiết diện vuông có cạnh  $a$ :  $I_z \approx 0,141a^4$ ;

❖ tiết diện chữ nhật có cạnh  $h \times b$  với  $h > b$ :

$$I_z \approx hb^3 \left[ \frac{16}{3} - 3,36 \frac{b}{h} \left( 1 - \frac{b^4}{12h^4} \right) \right];$$

❖ tiết diện chữ nhật hẹp có cạnh  $h \times b$  với  $h > 4b$ :  $I_z \approx \frac{b^3}{3} (h - 0,63b)$ ;

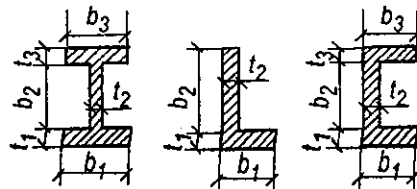
❖ tiết diện hình tròn có bán kính  $r$ :  $I_z = \frac{\pi r^4}{2}$ ;

❖ tiết diện thành mỏng hở (hình 8.17), được hình thành từ  $n$  phần tử chữ nhật hẹp có các cạnh  $b_i \times t_i$  với  $b_i > t_i$ :

$$I_z \approx \frac{1}{3} \alpha \sum_{i=1}^n b_i t_i^3$$

Hệ số  $\alpha$  phụ thuộc hình dạng tiết diện:

- hình **I**:  $\alpha = 1,30$ ;
- hình **L** (thép góc):  $\alpha = 1,00$ ;
- hình **[**:  $1,00 < \alpha < 1,30$ ;
- hình **†**:  $\alpha = 1,17$ ;



Hình 8.17

## 2. Xác định chuyển vị theo nguyên lý công khả dĩ

Trong trường hợp hệ thanh không gian bao gồm các thanh thẳng hoặc thanh cong có độ cong nhỏ, tương tự như khi thiết lập các công thức (4.25) và (4.33) trong chương 4, ta có thể thiết lập được công thức xác định chuyển vị như sau:

$$\begin{aligned} \Delta_{km} = & -\sum_j \bar{R}_{jk} Z_{jm} + \sum_i \bar{R}_{ik} \frac{R_{im}}{c_i} + \sum \int \frac{\bar{M}_{xk} M_{xm}}{EI_x} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{yk} M_{ym}}{EI_y} ds + \\ & + \sum \int \frac{\bar{M}_{zk} M_{zm}}{GI_z} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_{zk} N_{zm}}{EA} ds + \sum \int v_x \frac{\bar{Q}_{xk} Q_{xm}}{GA} ds + \\ & + \sum \int v_y \frac{\bar{Q}_{yk} Q_{ym}}{GA} ds + \sum \int \bar{N}_{zk} \alpha t_{cm} ds + \sum \int \bar{M}_{xk} \frac{\alpha}{h_y} (t_{2m} - t_{1m}) ds + \\ & + \sum \int \bar{M}_{yk} \frac{\alpha}{h_x} (t_{3m} - t_{1m}) ds. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Cách vận dụng công thức chuyển vị cũng tương tự như đã trình bày trong mục 4.6 chương 4. Một số đại lượng trong (8.8) đã được giải thích ở trên, ở đây chỉ cần giải thích thêm các đại lượng sau:

$\bar{R}_{ik}, R_{im}$  – phản lực tại liên kết đàn hồi thứ  $i$  ở trạng thái  $k$  và trạng thái  $m$ ;

$c_i$  – hệ số đàn hồi của liên kết đàn hồi thứ  $i$ .

$\bar{M}_{xk}, \bar{M}_{yk}, \bar{M}_{zk}, \bar{N}_{zk}, \bar{Q}_{xk}, \bar{Q}_{yk}$  – các biểu thức nội lực ở trạng thái " $k$ ";

$M_{xm}, M_{ym}, M_{zm}, N_{zm}, Q_{xm}, Q_{ym}$  – các biểu thức nội lực ở trạng thái " $m$ ";

$h_x, h_y$  – chiều cao của tiết diện theo phương trục  $x$  và  $y$ .

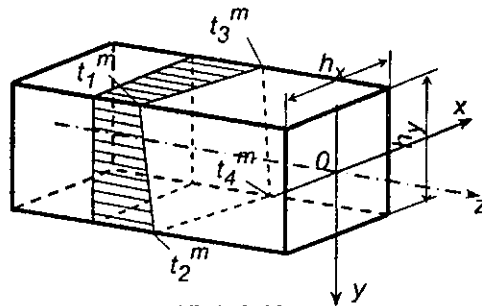
$t_1^m, t_2^m, t_3^m, t_4^m$  – độ biến thiên nhiệt độ tại các chốt chỉ định trên hình 8.18. Nếu giả thiết biểu đồ biến thiên nhiệt độ theo luật mặt phẳng thì giữa các đại lượng này có liên hệ như sau:

$$t_1^m + t_4^m = t_2^m + t_3^m;$$

$t_c^m$  – độ biến thiên nhiệt độ ở

trục, nếu tiết diện có hai trục đối xứng thì

$$t_c^m = (t_1^m + t_4^m) / 2 = (t_2^m + t_3^m) / 2.$$



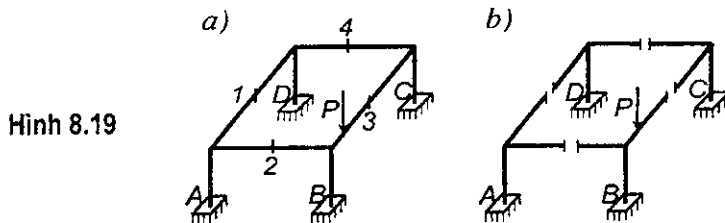
Hình 8.18

Ngoài ra cần chú ý là các định lý về năng lượng cũng như các định lý tương hỗ đã trình bày trong chương 4 đối với bài toán phẳng, vẫn nghiệm đúng với các hệ không gian.

## 8.6. Cách tính hệ thanh không gian siêu tĩnh theo phương pháp lực

Để tính hệ không gian siêu tĩnh ta cũng thực hiện trên hệ cơ bản. Hệ cơ bản có thể là tĩnh định hoặc siêu tĩnh với bậc thấp hơn song phải bất biến hình và phù hợp với khả năng tính toán.

Số ẩn của phương pháp lực được xác định theo (8.2), (8.3), (8.4), (8.5), trong đó  $n$  là bậc siêu tĩnh. Khi tính các hệ đơn giản ta có thể phát hiện ngay được số ẩn bằng cách loại trừ các liên kết thừa. Chẳng hạn, đối với hệ cho trên hình 8.19a, nếu cắt các thanh của hệ tại các tiết diện 1, 2, 3, 4 thì sẽ được một hệ tĩnh định bất biến hình (hình 8.19b). Tại mỗi mặt cắt ta loại bỏ một mối hàn tương đương với sáu liên kết thanh, do đó bậc siêu tĩnh của hệ là  $6.4 = 24$ .



Đối với hệ siêu tĩnh có bậc là  $n$ , khi chọn hệ cơ bản tĩnh định ta có hệ  $n$  phương trình chính tắc:

$$\delta_{k1} X_1 + \delta_{k2} X_2 + \dots + \delta_{kk} X_k + \dots + \delta_{kn} X_n + \Delta_{kP} = 0, \quad (8.9)$$

với  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Phương trình chính tắc, các hệ số và số hạng tự do vẫn có ý nghĩa vật lý như đã trình bày trong chương 5. Tuy nhiên, các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc cần được xác định theo công thức chuyển vị của hệ thanh không gian (8.8). Ta có:

$$\begin{aligned} \delta_{km} = & \sum_i \bar{R}_{ik} \frac{\bar{R}_{im}}{c_i} + \sum \int \frac{\bar{M}_{xk} \bar{M}_{xm}}{EI_x} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{yk} \bar{M}_{ym}}{EI_y} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{zk} \bar{M}_{zm}}{GI_z} ds + \\ & + \sum \int \frac{\bar{N}_k \bar{N}_m}{EA} ds + \sum \int v_x \frac{\bar{Q}_{xk} \bar{Q}_{xm}}{GA} ds + \sum \int v_y \frac{\bar{Q}_{yk} \bar{Q}_{ym}}{GA} ds; \end{aligned} \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{kP} = & \sum_i \bar{R}_{ik} \frac{R_{iP}^o}{c_i} + \sum \int \frac{\bar{M}_{xk} M_{xP}^o}{EI_x} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{yk} M_{yP}^o}{EI_y} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{zk} M_{zP}^o}{GI_z} ds + \\ & + \sum \int \frac{\bar{N}_k N_{iP}^o}{EA} ds + \sum \int v_x \frac{\bar{Q}_{xk} Q_{xP}^o}{GA} ds + \sum \int v_y \frac{\bar{Q}_{yk} Q_{yP}^o}{GA} ds. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Đối với các hệ khung và dầm không gian, thường được phép bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt và biến dạng dọc trục so với ảnh hưởng của biến dạng uốn khi xác định chuyển vị, do đó các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc được xác định theo công thức đơn giản hơn như sau:

$$\delta_{km} = \sum_i \bar{R}_{ik} \frac{\bar{R}_{im}}{c_i} + \sum \int \frac{\bar{M}_{xk} \bar{M}_{xm}}{EI_x} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{yk} \bar{M}_{ym}}{EI_y} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{zk} \bar{M}_{zm}}{GI_z} ds; \quad (8.12)$$

$$\Delta_{kP} = \sum_i \bar{R}_{ik} \frac{R_{iP}^o}{c_i} + \sum \int \frac{\bar{M}_{xk} M_{xP}^o}{EI_x} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{yk} M_{yP}^o}{EI_y} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{zk} M_{zP}^o}{GI_z} ds. \quad (8.13)$$

Cũng tương tự như trong hệ phẳng, ta có thể tính các tích phân trong các công thức trên bằng cách nhân biểu đồ theo Vêrêxaghin.

Đối với hệ dàn không gian, trong đó chỉ tồn tại lực dọc, công thức xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc có dạng đơn giản hơn như sau:

$$\begin{aligned} \delta_{km} &= \sum_i \bar{R}_{ik} \frac{\bar{R}_{im}}{c_i} + \sum_i \bar{N}_{ik} \bar{N}_{im} \frac{l_i}{(EA)_i}; \\ \Delta_{kP} &= \sum_i \bar{R}_{ik} \frac{R_{iP}^o}{c_i} + \sum_i \bar{N}_{ik} N_{iP}^o \frac{l_i}{(EA)_i}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Sau khi thiết lập và giải hệ phương trình chính tắc để tìm các ẩn  $X_k$  ta tìm nội lực trong hệ siêu tĩnh không gian theo công thức đã biết như sau:

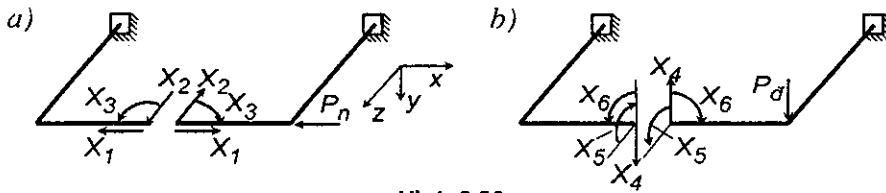
$$(S) = (\bar{S}_1)X_1 + (\bar{S}_2)X_2 + \dots + (\bar{S}_n)X_n + (S_P^o). \quad (8.15)$$

Ý nghĩa của các đại lượng trong (8.15) đã giải thích trong 5.2, chương 5.

**Trường hợp đặc biệt:** Đối với những hệ siêu tĩnh phẳng chịu tải trọng không gian (không nằm trong mặt phẳng của hệ) ta có thể dựa vào những nhận xét sau để làm đơn giản tính toán: những ẩn nằm trong mặt phẳng của hệ chỉ gây ra chuyển vị trong mặt phẳng hệ.

Ví dụ, với hệ cho trên hình 8.20 ta có sáu ẩn. Các ẩn  $X_1, X_2, X_3$  nằm trong

mặt phẳng của hệ chỉ gây ra chuyển vị trong mặt phẳng hệ. Do đó, các hệ số  $\delta_{41}, \delta_{42}, \delta_{43}, \delta_{51}, \delta_{52}, \delta_{53}, \delta_{61}, \delta_{62}, \delta_{63}$  biểu thị chuyển vị ngoài mặt phẳng hệ do các lực tác dụng trong mặt phẳng hệ sẽ bằng không.



Hình 8.20

Như vậy, mặc dù tải trọng tác dụng bất kỳ, bao giờ ta cũng có thể phân tích hệ phương trình chính tắc thành hai nhóm: một nhóm chỉ chứa các ẩn nằm trong mặt phẳng hệ ( $X_1, X_2, X_3$ ) và một nhóm chỉ chứa các ẩn nằm ngoài mặt phẳng hệ ( $X_4, X_5, X_6$ ). Khối lượng giải hệ phương trình chính tắc sẽ được giảm nhẹ rất nhiều.

Mặt khác, nếu phân tích tải trọng đã cho thành hai nhóm: nhóm tải trọng nằm trong mặt phẳng hệ và nhóm tải trọng tác dụng vuông góc với mặt phẳng hệ như trên hình 8.20a, b, thì ta thấy nhóm thứ nhất chỉ có ảnh hưởng đến các ẩn nằm trong mặt phẳng hệ còn nhóm thứ hai chỉ có ảnh hưởng đến các ẩn nằm ngoài mặt phẳng hệ. Nhận xét này cho phép đơn giản hóa việc xác định các số hạng tự do trong hai nhóm của hệ phương trình chính tắc.

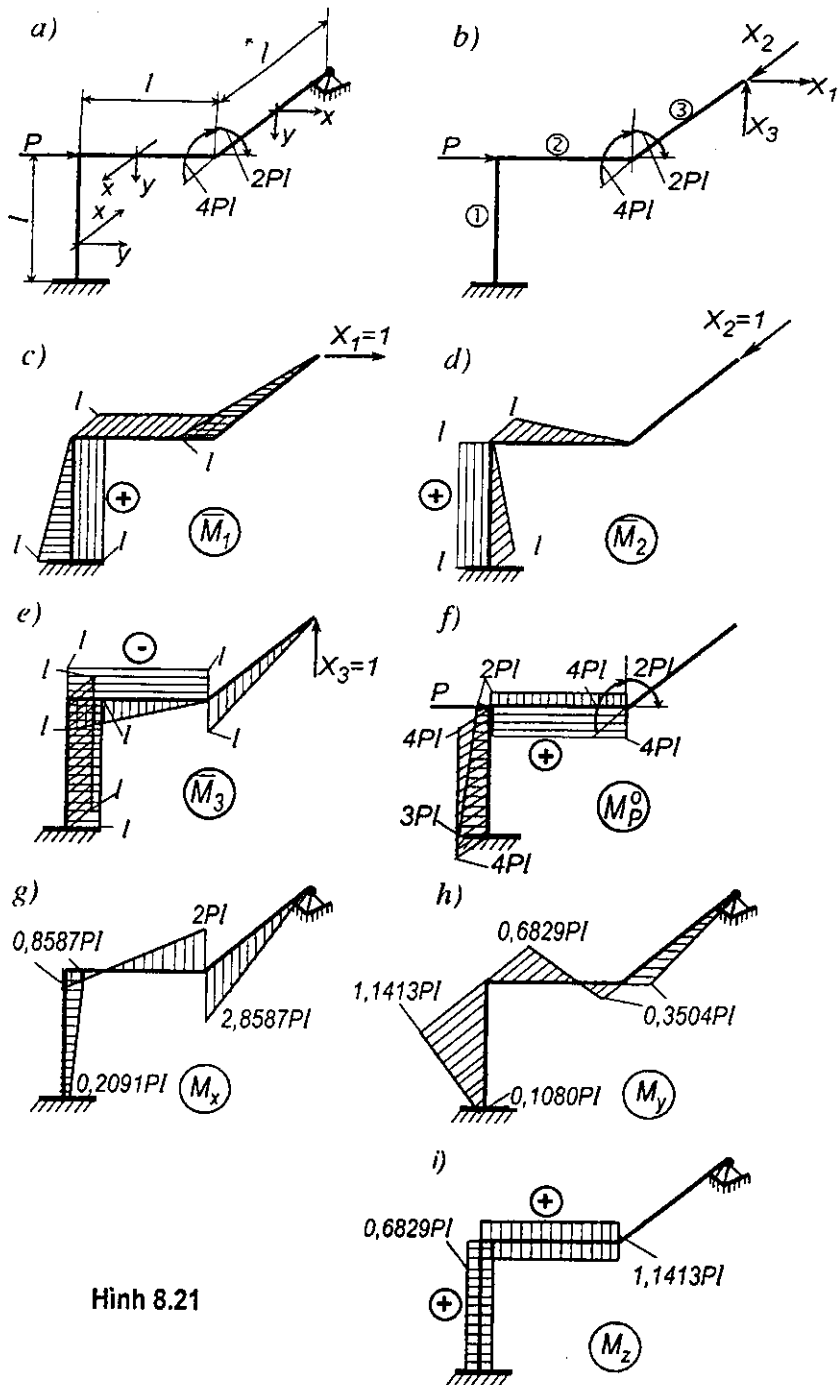
**Ví dụ 8.5.** Vẽ biểu đồ mômen uốn và mômen xoắn cho hệ trên hình 8.21a.

Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt và biến dạng dọc trục.

$$\text{Cho biết: } I_y = 0,5I_x; \quad I_z = 12(1+\mu)I_x; \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh bằng ba. Chọn hệ cơ bản như trên hình 8.21b. Chiều dương của trục quán tính chính trung tâm tương ứng với mỗi thanh chọn như trên hình 8.21a. Trên các hình 8.21c, d, e, f lần lượt vẽ các biểu đồ mômen uốn và mômen xoắn tương ứng với các nguyên nhân  $X_1=1, X_2=1, X_3=1$  và tải trọng. Để thể hiện các thành phần mômen uốn và mômen xoắn trên cùng một hình vẽ ta có thể quy ước biểu thị biểu đồ mômen xoắn bằng các đường kẻ song song với đường chuẩn (trục thanh) song giá trị các tung độ vẫn được đo theo phương vuông góc với đường chuẩn.

Sau khi thực hiện các phép nhân biểu đồ, ta xác định được các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc như sau:



Hình 8.21

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{19l^3}{6EI_x}; & \delta_{22} &= \frac{9l^3}{6EI_x}; & \delta_{33} &= \frac{26l^3}{6EI_x}; \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{7l^3}{6EI_x}; & \delta_{13} = \delta_{31} &= -\frac{3l^3}{6EI_x}; & \delta_{23} = \delta_{32} &= \frac{6l^3}{6EI_x}; \\ \Delta_{1P} &= \frac{8Pl^3}{6EI_x}; & \Delta_{2P} &= -\frac{24Pl^3}{6EI_x}; & \Delta_{3P} &= -\frac{73Pl^3}{6EI_x}. \end{aligned}$$

Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{aligned} 19X_1 + 7X_2 - 3X_3 + 8P &= 0; \\ 7X_1 + 9X_2 + 6X_3 - 24P &= 0; \\ -3X_1 + 6X_2 + 26X_3 - 73P &= 0. \end{aligned}$$

Nghiệm của hệ phương trình:

$$X_1 = -0,3504P; \quad X_2 = 1,0333P; \quad X_3 = 2,8587P.$$

Theo (8.16), các biểu đồ nội lực được xác định như sau:

$$(M) = (\bar{M}_1)X_1 + (\bar{M}_2)X_2 + (\bar{M}_3)X_3 + (M_P^0).$$

Kết quả tìm được như trên hình 8.21 g, h, i.

## 8.7. Cách tính hệ thanh không gian siêu động theo phương pháp chuyển vị

Tương tự như trong bài toán phẳng, trước khi nghiên cứu cách tính ta cần xác định bậc siêu động của hệ. Công thức xác định bậc siêu động vẫn có dạng:

$$n = n_1 + n_2, \quad (8.16)$$

trong đó:

$n_1$  - số chuyển vị xoay độc lập chưa biết tại các nút và các ngàm đàn hồi.

Nói chung, mỗi nút của hệ không gian có ba chuyển vị xoay cho nên  $n_1$  được tính bằng ba lần số nút của hệ cùng với số chuyển vị xoay chưa biết của ngàm đàn hồi.

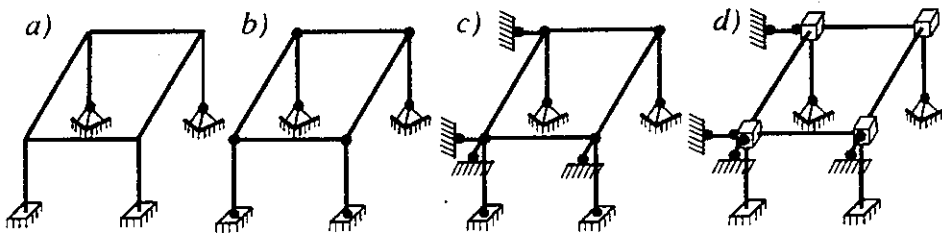
$n_2$  - số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết tại các nút và tại các liên kết thanh đàn hồi.

Nếu chấp nhận giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục trong các thanh thì cũng tương tự như trong bài toán phẳng ta có thể xác định  $n_2$  như sau: thay các ngàm và nút của hệ bằng các khớp, ta sẽ được sơ đồ mới nói

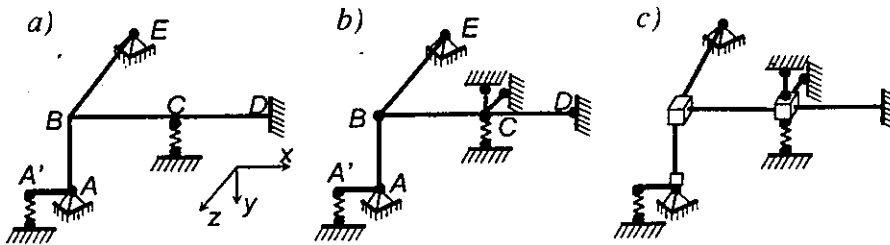


chung là biến hình, tiếp đó đặt thêm các liên kết thanh vào hệ mới để ngăn cản tất cả các chuyển vị thẳng của các nút, số liên kết tối thiểu phải đặt thêm vào hệ mới chính là số chuyển vị thẳng  $n_2$  cần tìm.

Chẳng hạn, với hệ trên hình 8.22a, nếu xem hệ có 8 phần tử thanh thì số nút là 4 nên  $n_1 = 3.4 = 12$ . Sau khi đặt khớp tại các nút và ngàm ta được hệ mới như trên hình 8.22b, tiếp đó ta cần đặt thêm vào hệ mới này bốn liên kết thanh để ngăn cản chuyển vị thẳng tại các nút như trên hình 8.22c. Như vậy số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết của các nút là  $n_2 = 4$ . Bậc siêu động của hệ  $n = 16$ .



Hình 8.22



Hình 8.23

Với hệ trên hình 8.23a có ngàm đàn hồi tại A và thanh đàn hồi tại C, nếu xem hệ có 4 phần tử thanh  $AB, BC, CD, BE$  thì hệ có 2 nút  $B, C$ . Số chuyển vị xoay độc lập chưa biết bao gồm:  $3.2 = 6$  tại hai nút  $B, C$  và 1 chuyển vị xoay quanh phương trục  $z$  tại ngàm đàn hồi A, do đó:  $n_1 = 7$ . Để tìm số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết của các nút ta thấy cần đặt thêm vào hệ đã hoá khớp tại các nút và ngàm 2 liên kết thanh để ngăn cản chuyển vị thẳng tại nút C như trên hình 8.23b (chuyển vị thẳng đứng tại A' của ngàm đàn hồi không độc lập và được xác định theo góc xoay tại A), do đó:  $n_2 = 2$ . Bậc siêu động của hệ  $n = 9$ .

Sau khi xác định bậc siêu động tức là số ẩn số của phương pháp, ta lập hệ cơ bản bằng cách đặt tại mỗi nút một liên kết mômen không gian và đặt thêm các liên kết lực (liên kết thanh) để ngăn cản tất cả các chuyển vị của

các nút hệ. Mỗi liên kết mômen không gian ngăn cản được ba chuyển vị xoay quanh ba trục tọa độ, nhưng không ngăn cản được chuyển vị thẳng. Điều quan trọng là trong hệ cơ bản chỉ bao gồm các phần tử thanh mẫu đã được nghiên cứu như trong bảng 6.1; 6.2 và 8.2.

Hệ trên hình 8.22d là hệ cơ bản của hệ 8.22a theo phương pháp chuyển vị. Hệ trên hình 8.23c là hệ cơ bản của hệ 8.23a, trong đó tại A chỉ cần đặt thêm một liên kết ngăn cản chuyển vị xoay quanh trục y.

Để đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc giống hệ đã cho, ta cho các nút chuyển vị cưỡng bức với các giá trị để sao cho phản lực trong các liên kết đặt thêm vào hệ phải bằng không. Điều kiện này được thể hiện qua hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị:

$$r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \dots + r_{kk}Z_k + \dots + r_{kn}Z_n + R_{kP} = 0, \quad (8.17)$$

với  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Phương trình chính tắc, các hệ số và số hạng tự do vẫn có ý nghĩa vật lý như đã trình bày trong chương 6.

Để xác định các hệ số và số hạng tự do ta cần vẽ các biểu đồ  $\bar{S}_m, S_p^o$  và vận dụng các điều kiện cân bằng nhưng cần thực hiện theo quan điểm không gian.

Khi vẽ các biểu đồ  $\bar{S}_m, S_p^o$  ta sử dụng các số liệu đã có trong các bảng 6.1, 6.2 và các số liệu về phần tử mẫu thanh chịu các nguyên nhân gây xoắn trong bảng 8.2.

**Bảng 8.2**

$M_{Az} = M_{Bz} = -\frac{Gl_z}{l}$	$M_{Az} = -\frac{b}{l} M^*$ $M_{Bz} = \frac{a}{l} M^*$	$M_{Az} = -\frac{mc}{2l} (2b + c)$ $M_{Bz} = \frac{mc}{2l} (2a + c)$

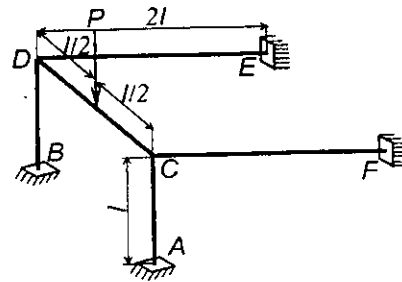
Sau khi thiết lập và giải hệ phương trình chính tắc để tìm các ẩn số  $Z_m$ , ta xác định nội lực trong hệ siêu động theo công thức quen biết sau:

$$(S_p) = (\bar{S}_1)Z_1 + (\bar{S}_2)Z_2 + \dots + (\bar{S}_m)Z_m + \dots + (\bar{S}_n)Z_n + (S_p^0). \quad (8.18)$$

Các đại lượng trong (8.18) vẫn có ý nghĩa như đã trình bày trong chương 6.

**Ví dụ 8.6.** Vẽ biểu đồ mômen uốn và mômen xoắn cho khung trên hình 8.24. Cho biết khung có tiết diện không đổi, hình tròn có bán kính  $r$ ;  $G = 0,4E$ .

Ta nhận thấy tải trọng  $P$  chỉ tác dụng trong mặt phẳng  $ABCD$  của hệ cho nên nếu chấp nhận giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục thì phần khung  $ABCD$  chỉ biến dạng trong mặt phẳng  $ABCD$ . Mặt khác, căn cứ vào tính chất đối xứng của bài toán ta thấy các nút  $C$  và  $D$  không thể có chuyển vị thẳng mà chỉ có chuyển vị xoay bằng nhau và ngược chiều trong mặt phẳng  $ABCD$ .



Hình 8.24

Như vậy, khi tính hệ theo phương pháp chuyển vị ta chỉ cần thực hiện với một ẩn, đó là cặp chuyển vị xoay đối xứng tại hai nút  $C$  và  $D$  xảy ra trong mặt phẳng  $ABCD$ .

Hệ cơ bản tương ứng như trên hình 8.25a.

Để vẽ biểu đồ mômen uốn do chuyển vị  $Z_1 = l$  và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản ta sử dụng các số liệu cho trong các bảng 6.1, 6.2 và 8.2. Trong trường hợp này ta có:

$$EI_x = EI_y = E \frac{\pi r^4}{4} = EI; \quad GI_z = G \frac{\pi r^4}{2} = 0,8 EI.$$

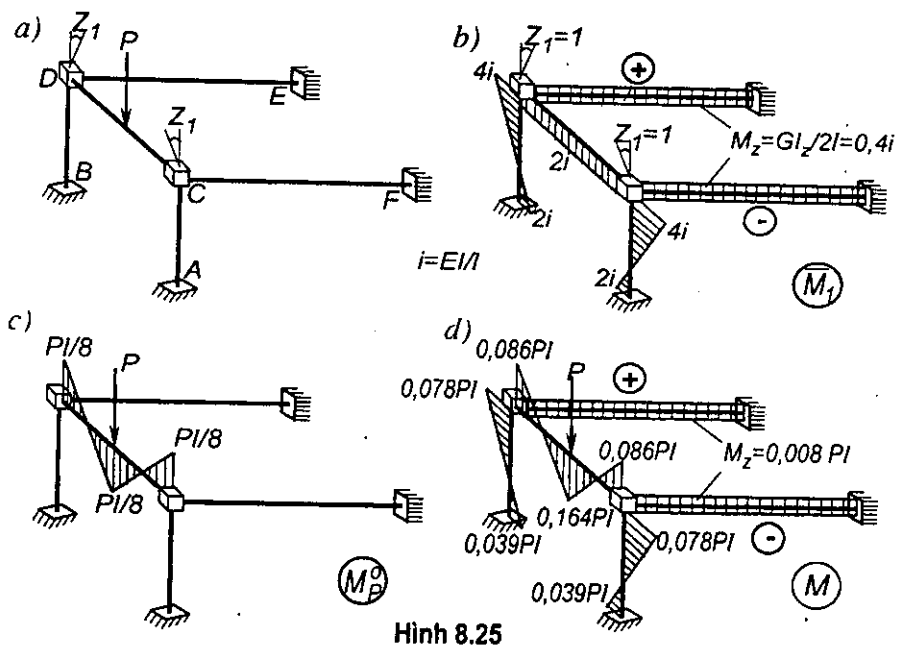
Kết quả như trên các hình 8.25b và c.

Từ các biểu đồ vừa tìm được, ta xác định các hệ số và số hạng tự do của phương trình chính tắc. Kết quả:

$$r_{11} = 2(4i + 2i + 0,4i) = 12,8i;$$

trong đó  $i = EI/l$ , đối với tiết diện tròn ta có  $GI_z/2l = 0,4i$ .

$$R_{1P} = -2 \frac{Pl}{8} = -\frac{Pl}{4}.$$



Hình 8.25

Phương trình chính tắc:  $12,8i Z_1 - \frac{Pl}{4} = 0.$

Suy ra:  $Z_1 = 0,0195 \frac{Pl}{i} = 0,0195 \frac{Pl^2}{EI}.$

Biểu đồ mômen tổng cộng được xác định theo công thức sau:

$$(M) = (\bar{M}_1)Z_1 + (M_P^o).$$

Kết quả tìm được như trên hình 8.25d.

## CÂU HỎI ÔN TẬP

- 8.1. Nêu tính chất của các loại liên kết không gian.
- 8.2. Trình bày cách nối hai vật thể thành hệ không gian bất biến hình.
- 8.3. Nêu tính chất của bộ ba và trình bày cách áp dụng bộ ba để khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ dàn không gian.
- 8.4. Thế nào là hệ dàn lưới ? Nêu đặc điểm của hệ dàn lưới.
- 8.5. Trình bày điều kiện cần và đủ để cấu tạo hệ thanh không gian bất kỳ thành hệ bất biến hình.
- 8.6. Nêu nguyên tắc tính hệ thanh không gian tĩnh định.
- 8.7. Nêu nguyên tắc tính dàn không gian tĩnh định.
- 8.8. Nêu sự khác nhau giữa cách tính chuyển vị trong hệ thanh phẳng và hệ thanh không gian. Giải thích ý nghĩa của các đại lượng trong công thức chuyển vị của hệ không gian.
- 8.9. Trình bày cách tính hệ thanh không gian siêu tĩnh theo phương pháp lực. So với hệ phẳng, cách tính hệ siêu tĩnh không gian phức tạp hơn ở những điểm nào?
- 8.10. Trình bày cách tính hệ thanh không gian siêu động theo phương pháp chuyển vị.

# 9

## Phương pháp phân phối mômen

Phương pháp phân phối mômen thuộc loại phương pháp tính lặp đúng dần, cho kết quả tiệm cận dần tới kết quả tính chính xác (phương pháp lực hay phương pháp chuyển vị) theo số lần thực hiện phép lặp.

Hiện có nhiều phương pháp lặp tính đúng dần áp dụng cho kết cấu siêu tĩnh hoặc siêu động, trình bày dưới nhiều hình thức khác nhau. Nói chung nội dung của các phương pháp này được trình bày dưới dạng phân phối nội lực (mômen uốn, lực cắt) hoặc phân phối biến dạng.

Trong chương này chỉ giới thiệu hai phương pháp phân phối mômen: *phương pháp H. Cross* và *phương pháp G. Kani* là những phương pháp được áp dụng nhiều trong thực tế đồng thời cũng là những phương pháp cơ bản được dùng để làm cơ sở cho việc nghiên cứu các phương pháp tính lặp đúng dần khác.

### 9.1. Phương pháp H. Cross

Phương pháp H. Cross được xây dựng trên cơ sở những giả thiết giống như những giả thiết của phương pháp chuyển vị.

Về thực chất, phương pháp này là một hình thức khác của phương pháp chuyển vị, trong đó việc giải hệ phương trình chính tắc được thực hiện theo phương pháp lặp đúng dần có mang ý nghĩa vật lý.

*Phương pháp H. Cross có những ưu điểm sau:*

- \* *Tính toán đơn giản.* Hầu hết các phép tính trong phương pháp Cross chỉ là những phép tính cộng và nhân do đó chỉ cần dùng máy tính phổ thông cũng đủ để thực hiện.
- \* *Phương pháp Cross chỉ yêu cầu phải giải một số lượng phương trình rất ít so với số lượng phương trình theo các phương pháp "chính xác", có trường hợp không cần phải giải hệ phương trình.* Do đó phương pháp này thích hợp cho những hệ siêu tĩnh bậc cao chẳng hạn như hệ khung nhiều tầng, nhiều nhịp.

Tuy nhiên, phương pháp này cũng còn có những điểm hạn chế tương tự

như phương pháp chuyển vị, thường chỉ áp dụng có hiệu quả cho những hệ khung hoặc dầm. Hiện nay cũng đã có một số phương pháp "cải tiến phương pháp Cross" nhằm mở rộng diện áp dụng và nâng cao hiệu quả [xem 2]. Trong giáo trình chỉ giới thiệu phương pháp Cross "thuần túy".

## A. Khái niệm và quy ước về dấu

### 1. Khái niệm về hệ có nút chuyển vị thẳng và không chuyển vị thẳng

Dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài như tải trọng chằng hạn, nói chung các nút của hệ có thể có chuyển vị xoay (nút bị xoay nhưng không thay đổi vị trí) và chuyển vị thẳng (thay đổi vị trí).

*Trong quá trình biến dạng, nếu một hoặc một số nút của khung có chuyển vị thẳng thì khung được gọi là hệ có nút chuyển vị thẳng, còn nếu tất cả các nút không chuyển vị thẳng thì khung được gọi là hệ có nút không chuyển vị thẳng.*

Để phân biệt hai loại hệ này ta có thể vận dụng biện pháp đã biết trong mục 6.1 chương 6 khi tìm số ẩn của hệ theo phương pháp chuyển vị vì thực chất của hai vấn đề là một. Những hệ tồn tại số ẩn chuyển vị thẳng  $n_2$  là hệ có nút chuyển vị thẳng. Ngược lại, hệ có  $n_2 = 0$  là hệ có nút không chuyển vị thẳng.

### 2. Ký hiệu và quy ước về dấu của mômen uốn và lực cắt

Đại lượng cần tìm trong phương pháp Cross là mômen uốn tại tiết diện ở các đầu thanh. Những mômen này được ký hiệu bằng chữ  $M$  có mang theo hai chỉ số. Chỉ số thứ nhất biểu thị vị trí của tiết diện chịu mômen uốn, chỉ số thứ hai kết hợp với chỉ số thứ nhất biểu thị thanh chịu mômen uốn đó. Đối với lực cắt ta cũng ký hiệu tương tự.

Ví dụ  $M_{AB}$  đọc là mômen uốn tại tiết diện A thuộc thanh AB (hình 9.1);  $Q_{AB}$  đọc là lực cắt tại tiết diện A thuộc thanh AB.

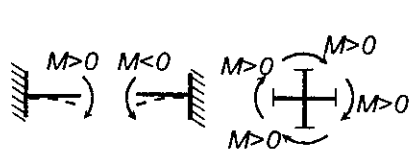


Hình 9.1

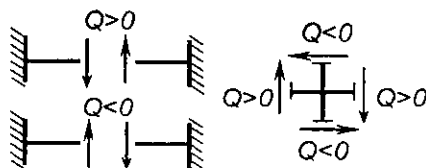
*Quy ước về dấu của nội lực trong phương pháp Cross có phần khác với cách quy ước về dấu trong Sức bền vật liệu:*

\* Mômen uốn tại nút được xem là dương khi làm cho thờ giữa của thanh quay theo chiều kim đồng hồ và được xem là âm khi làm cho thờ giữa của thanh quay ngược chiều kim đồng hồ (hình 9.2).

\* Lực cắt được xem là dương khi làm cho phần thanh chịu lực quay theo chiều kim đồng hồ và được xem là âm khi làm quay ngược chiều kim đồng hồ (giống SBVL), (hình 9.3).



Hình 9.2

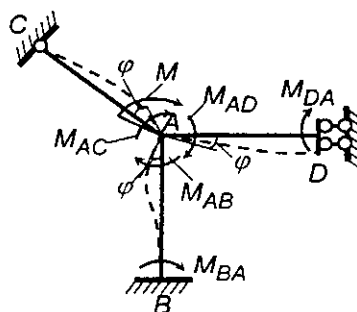


Hình 9.3

### B. Sự phân phối mômen xung quanh một nút

Để chuẩn bị nghiên cứu phương pháp phân phối mômen ta khảo sát bài toán cơ bản: sự phân phối mômen xung quanh một nút không có chuyển vị thẳng.

Xét hệ chỉ có một nút A không có chuyển vị thẳng như trên hình 9.4. Giả sử đặt tại nút A một mômen ngoại lực  $M$ , yêu cầu xác định các mômen uốn  $M_{AB}$ ,  $M_{AC}$ ,  $M_{AD}$  do mômen  $M$  phân phối vào các tiết diện ở đầu A trong mỗi thanh và xác định mômen uốn  $M_{BA}$ ,  $M_{CA}$  và  $M_{DA}$  tại các đầu đối diện với nút A.



Hình 9.4

Tất nhiên, các mômen uốn  $M_{AB}$ ,  $M_{AC}$ ,  $M_{AD}$  phải cân bằng với mômen  $M$ , ta có:

$$M_{AB} + M_{AC} + M_{AD} + M = 0. \quad (9.1)$$

Dưới tác dụng của mômen  $M$  các đầu thanh tại nút A bị xoay. Căn cứ vào các số liệu tìm được trong bảng 6.2 chương 6, theo quy ước về dấu của Cross ta có:

✦ Với thanh AB có đầu đối diện B là ngàm:

$$\varphi_{AB} = -\frac{M_{AB}}{4 \frac{EI_{AB}}{l_{AB}}} = -\frac{M_{AB}}{4R_{AB}}, \quad (9.2)$$

trong đó  $R_{AB}$  – độ cứng đơn vị quy ước của thanh có đầu đối diện là ngàm,



$$R_{AB} = \frac{EI_{AB}}{l_{AB}}. \quad (9.3)$$

✦ Với thanh AC có đầu đối diện là khớp:

$$\varphi_{AC} = -\frac{M_{AC}}{3 \frac{EI_{AC}}{l_{AC}}} = -\frac{M_{AC}}{4 \frac{3EI_{AC}}{4l_{AC}}} = -\frac{M_{AC}}{4R_{AC}}, \quad (9.4)$$

trong đó  $R_{AC}$  – độ cứng đơn vị quy ước của thanh có đầu đối diện là khớp,

$$R_{AC} = \frac{3EI_{AC}}{4l_{AC}}. \quad (9.5)$$

✦ Với thanh AD có đầu đối diện là ngàm trượt dưới dạng hai thanh song song với trục thanh:

$$\varphi_{AD} = -\frac{M_{AD}}{EI_{AD}} = -\frac{M_{AD}}{4 \frac{1}{4} \frac{EI_{AD}}{l_{AD}}} = -\frac{M_{AD}}{4R_{AD}}, \quad (9.6)$$

trong đó  $R_{AD}$  – độ cứng đơn vị quy ước của thanh có đầu đối diện là ngàm trượt dưới dạng hai thanh song song với trục thanh,

$$R_{AD} = \frac{1}{4} \frac{EI_{AD}}{l_{AD}}. \quad (9.7)$$

Sở dĩ mỗi loại thanh ta quy định một loại độ cứng đơn vị quy ước khác nhau là để có được sự liên hệ giữa góc xoay  $\varphi$  và mômen  $M$  thống nhất về hình thức.

Theo giả thiết nút A là nút cứng ta có:  $\varphi_{AB} = \varphi_{AC} = \varphi_{AD} = \varphi$ .

Thay (9.2), (9.4) và (9.6) vào điều kiện trên:

$$\varphi = -\frac{M_{AB}}{4R_{AB}} = -\frac{M_{AC}}{4R_{AC}} = -\frac{M_{AD}}{4R_{AD}}. \quad (9.8)$$

Theo tính chất của tỷ lệ thức đồng thời chú ý đến (9.1), ta có:

$$\varphi = -\frac{M_{AB} + M_{AC} + M_{AD}}{4(R_{AB} + R_{AC} + R_{AD})} = -\frac{M}{4(R_{AB} + R_{AC} + R_{AD})}. \quad (9.9)$$

So sánh (9.9) với (9.8) ta suy ra:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= -\frac{R_{AB}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{AD}} M; \\ M_{AC} &= -\frac{R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{AD}} M; \end{aligned} \quad (9.10)$$

$$M_{AD} = -\frac{R_{AD}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{AD}} M.$$

Như vậy, mômen  $M$  đặt tại nút  $A$  sẽ phân phối ảnh hưởng vào các đầu thanh quy tụ tại nút với những giá trị xác định theo (9.10). Ta gọi những mômen này là *mômen phân phối*.

Để xác định mômen tại các đầu thanh đối diện ta có thể vận dụng kết quả trong bảng 6.2. Áp dụng quy ước về dấu của Cross ta có:

$$M_{BA} = \frac{1}{2} M_{AB}; \quad M_{CA} = 0; \quad M_{DA} = -M_{AD}. \quad (9.11)$$

Ta gọi những mômen này là *mômen truyền*.

Trong trường hợp tổng quát, khi nút  $A$  gồm nhiều thanh quy tụ ta có thể suy rộng các công thức trên và được:

❖ *Mômen phân phối tại đầu  $A$  thuộc thanh  $AX$  có đầu đối diện  $X$ :*

$$M_{AX} = -\gamma_{AX} M. \quad (9.12)$$

❖ *Mômen truyền:*

$$M_{XA} = \beta_{XA} M_{AX}. \quad (9.13)$$

Trong đó:

$\beta_{XA}$  – hệ số truyền của thanh  $AX$ ;

$\gamma_{AX}$  – hệ số phân phối của thanh  $AX$ :

$$\gamma_{AX} = \frac{R_{AX}}{\sum R}. \quad (9.14)$$

$R_{AX}$  – độ cứng đơn vị quy ước của thanh  $AX$ ;

$\sum R$  – tổng số độ cứng đơn vị quy ước của các thanh quy tụ tại nút.

Tùy theo điều kiện liên kết tại đầu thanh đối diện  $X$ , các độ cứng đơn vị quy ước  $R_{AX}$  và hệ số truyền  $\beta_{XA}$  sẽ có trị số khác nhau (xem bảng 9.1).

Trong trường hợp đầu đối diện  $X$  là đầu tự do, ta dễ dàng nhận thấy các trị số này bằng không.

**Bảng 9.1**

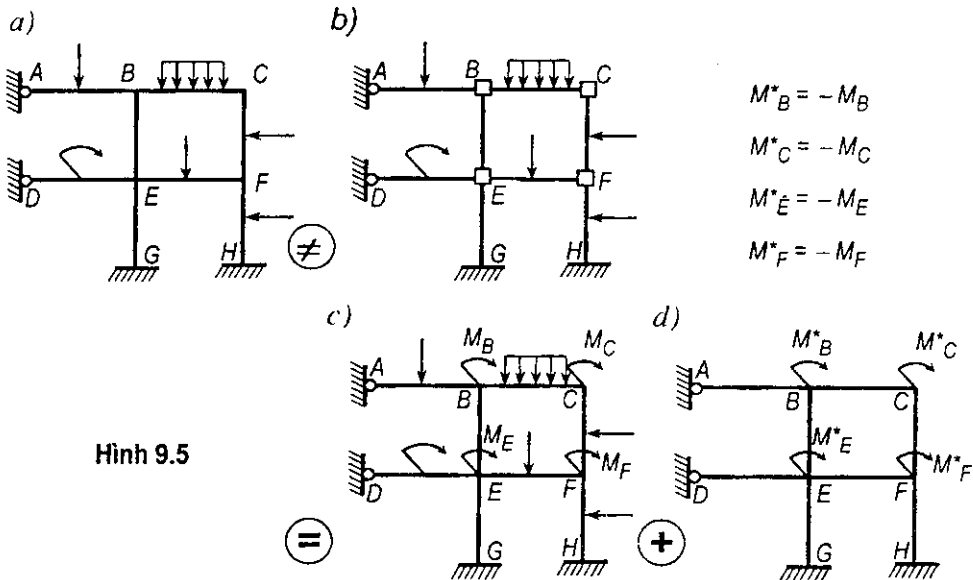
<i>Liên kết tại đầu đối diện với nút</i>	$R_{AX}$	$\beta_{XA}$
Ngàm	$EI / l$	$1/2$
Khớp	$3EI / 4l$	$0$
Ngàm trượt dưới dạng hai thanh song song với trục thanh	$EI / 4l$	$-1$
Tự do	$0$	$0$

Khi tại nút A có ngàm đàn hồi đặc trưng bằng hệ số đàn hồi  $c$ , cũng lập luận tương tự như trên ta thấy: mômen phân phối vào ngàm đàn hồi  $M_{ndh}$  và hệ số phân phối của ngàm đàn hồi  $\gamma_{ndh}$  vẫn được xác định theo (9.12) và (9.14) với độ cứng đơn vị quy ước của ngàm đàn hồi  $R_{ndh} = c/4$ .

### C. Cách tính hệ có nút không chuyển vị thẳng

Để trình bày được đơn giản ta sẽ tìm hiểu nội dung phương pháp thông qua hệ trên hình 9.5a. Tuy nhiên, cách lập luận vẫn là tổng quát và áp dụng được cho hệ bất kỳ có nút không chuyển vị thẳng.

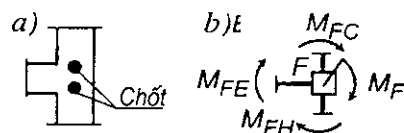
Trong phương pháp phân phối mômen ta chọn mômen uốn tại các đầu thanh làm các đại lượng cần tìm. Sau khi biết mômen uốn tại các đầu thanh, ta dễ dàng suy ra nội lực tại tiết diện bất kỳ ở bên trong thanh.



Hình 9.5

Tương tự ngăn cản chuyển vị xoay của các nút bằng cách đặt vào mỗi nút hai chốt (hình 9.6a). Trên hình 9.6b mô tả nút F trong trường hợp bị chốt.

Lúc này các đầu thanh quy tụ ở nút có thể coi như bị ngàm (không xoay được) và ta có thể dễ dàng tìm được mômen uốn tại các đầu thanh theo bảng 6.1, chương 6. Thật vậy, sau khi đã đặt chốt vào các nút thì trong hệ chỉ bao gồm những phần tử mẫu



Hình 9.6

là những thanh có dạng liên kết và chịu tải trọng đã được nghiên cứu (giống như hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị).

Tất nhiên, những mômen vừa thu được không phải là mômen cần tìm đối với hệ ban đầu. Trên hình 9.5a và hình 9.5b là sơ đồ của hệ thực và hệ có nút bị chốt, nội lực trong hai hệ này khác nhau.

Lúc này trong các nút bị chốt sẽ phát sinh những phản lực mômen (tương tự như các  $R_{kp}$  trong phương pháp chuyển vị) gọi là *ngẫu lực chèn*. Ngẫu lực chèn phải cân bằng với các mômen uốn tại đầu của những thanh quy tụ vào nút đó do tải trọng tác dụng trên hệ có nút bị chốt gây ra. Chẳng hạn với nút  $F$  trên hệ 9.5b vẽ riêng trên hình 9.6b, ta có:

$$M_F + M_{FH} + M_{FC} + M_{FE} = 0.$$

Do đó:

$$M_F = -(M_{FC} + M_{FE} + M_{FH}).$$

Như vậy, *ngẫu lực chèn tại một nút nào đó bằng tổng đại số các mômen uốn tại đầu các thanh quy tụ ở nút đang xét do tải trọng gây ra trên hệ có nút bị chốt nhưng đổi dấu.*

Nếu thay các chốt của hệ ở hình 9.5b bằng những ngẫu lực chèn vừa tìm được ta sẽ được hệ có nút không bị chốt tương đương như trên hình 9.5c. Tất nhiên nội lực trong hệ trên hình 9.5c cũng khác với nội lực trong hệ trên hình 9.5a.

Bây giờ ta xét hệ phụ (hình 9.5d) chỉ chịu những ngẫu lực đặt tại nút có giá trị bằng ngẫu lực chèn nhưng ngược chiều. Ký hiệu những ngẫu lực này là  $M^*_B = -M_B$ ;  $M^*_C = -M_C$  ... và gọi là các *mômen nút cứng*. Gọi như vậy là vì giá trị của những mômen này là tổng đại số các mômen uốn ở đầu những thanh quy tụ tại nút đang xét do tải trọng gây ra trong hệ có tất cả các nút bị chốt cứng. Ví dụ:

$$M^*_F = -M_F = M_{FC} + M_{FE} + M_{FH}.$$

Theo nguyên lý cộng tác dụng, ta có:

Hệ thực chịu tải trọng đã cho (hình 9.5a)	=	Hệ chịu tải trọng và những ngẫu lực chèn đặt ở các nút (hình 9.5b hoặc c)	+	Hệ không chịu tải trọng, chỉ chịu những mômen nút cứng ở các nút (hình 9.5d)
---	---	---	---	--

Như vậy, muốn tìm nội lực trong hệ trên hình 9.5a ta phải tìm nội lực trong hai hệ trên hình 9.5c và 9.5d.

Đối với hệ trên hình 9.5c ta dễ dàng tìm ngay được nội lực bằng cách sử dụng các số liệu trong bảng 6.1, chương 6, vì hệ này tương đương với hệ trên hình 9.5b là hệ gồm những phần tử mẫu đã được nghiên cứu (biểu đồ mômen uốn trong hệ chính là biểu đồ  $M_p'$  trong phương pháp chuyển vị).

Vấn đề mới cần phải đề cập là tính hệ 9.5d chỉ chịu các mômen nút cứng. Ta sẽ tính hệ này theo phương pháp lặp đúng dần.

Trước tiên, giả thiết tất cả các nút của hệ đều bị chốt. Nhưng vấn đề cần thực hiện là phải tính hệ với các nút được tự do. Vậy muốn đi từ trạng thái đầu (các nút bị chốt) đến trạng thái cuối cùng (các nút được tự do) ta phải trải qua quá trình tính toán như thế nào?

Nếu tháo chốt tại tất cả các nút cùng một lúc thì sẽ chưa giải được bài toán vì không có sẵn kết quả mẫu. Bởi vậy ta cần phải lần lượt tháo chốt ở từng nút. Giả sử tháo chốt ở nút  $B$  còn các nút khác vẫn chốt cứng, lúc này bộ phận  $BACE$  của hệ sẽ có dạng giống như bài toán mẫu đã xét ở điểm 9.1B, vì bộ phận đó chỉ có một nút  $B$  tự do còn các đầu thanh đối diện đều là ngàm hoặc khớp. Áp dụng kết quả mẫu ở điểm 9.1B ta xác định được các mômen phân phối và mômen truyền do mômen nút cứng  $M^*_{B}$  gây ra.

Sau khi tháo chốt ở nút  $B$ , nút này sẽ xoay đến vị trí cân bằng mới, ta lại chốt nút  $B$  ở vị trí cân bằng mới, tiếp đó chuyển sang nút khác và cũng thực hiện như ở nút  $B$ . Trong quá trình tháo chốt nhiều lần ở tất cả các nút, góc xoay sẽ giảm dần dần. Tất nhiên, cần thực hiện nhiều lần như vậy cho đến khi những góc xoay này trở thành không đáng kể, nghĩa là khi tháo tất cả các chốt thì tất cả các nút không xoay nữa và trạng thái này là trạng thái cuối cùng cần tìm.

Để nắm được tiến trình phân phối mômen ta xét trường hợp hệ trên hình 9.5d.

Đầu tiên, tháo chốt ở nút  $B$ , trên hình vẽ, tên nút được tháo chốt ghi trong khuyên tròn (hình 9.7a). Lúc này mômen làm cho nút không cân bằng trong lần tính lặp đầu tiên gọi là trong chu trình  $l$ , ký hiệu là  $M_{B,l}$  được xác định bằng mômen nút cứng  $M^*_{B}$ :

$$M_{B,l} = M^*_{B}.$$

Dưới tác dụng của  $M_{B,l}$ , nút  $B$  xoay tới vị trí cân bằng mới. Áp dụng các công thức (9.12), (9.13) ta xác định được mômen phân phối (gạch chân)

và mômen truyền:

Mômen phân phối:

$$\underline{M}_{BA,1} = -\gamma_{BA} M_{B,1};$$

$$\underline{M}_{BC,1} = -\gamma_{BC} M_{B,1};$$

$$\underline{M}_{BE,1} = -\gamma_{BE} M_{B,1};$$

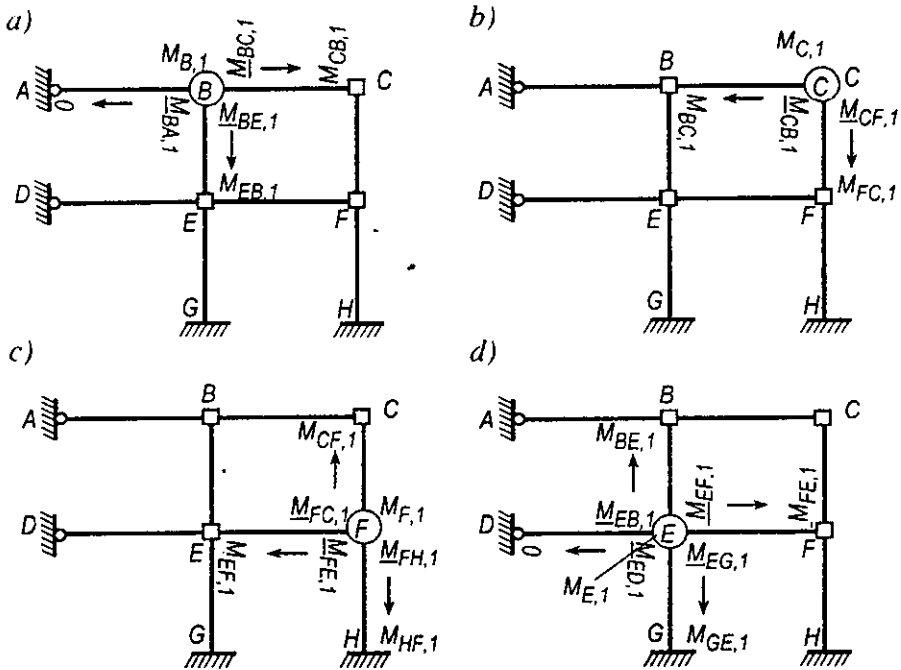
Mômen truyền:

$$M_{AB,1} = \beta_{AB} \underline{M}_{BA,1} = 0;$$

$$M_{CB,1} = \beta_{CB} \underline{M}_{BC,1} = -\frac{1}{2} \gamma_{BC} M_{B,1};$$

$$M_{EB,1} = \beta_{EB} \underline{M}_{BE,1} = -\frac{1}{2} \gamma_{BE} M_{B,1}.$$

Tất nhiên những mômen vừa tìm được tại các đầu thanh chưa phải là kết quả cuối cùng, vì lúc này chỉ riêng nút  $B$  được tự do còn các nút khác vẫn bị chốt.



Hình 9.7

Chốt nút  $B$  ở vị trí cân bằng mới, chuyển sang tháo chốt ở nút lân cận, chẳng hạn nút  $C$  (hình 9.7b). Bây giờ tại  $C$ , mômen làm cho nút không cân bằng trong chu trình  $l$  là  $M_{C,1}$  bao gồm hai mômen: mômen nút cứng  $M^*_C$  sẵn có từ trước và mômen truyền  $M_{CB,1}$  vừa tích lũy thêm trong quá trình tháo chốt ở nút  $B$ :

$$M_{C,1} = M^*_C + M_{CB,1}.$$

Dưới tác dụng của  $M_{C,I}$  nút  $C$  xoay tới vị trí cân bằng mới. Áp dụng các công thức (9.12), (9.13) ta có:

$$\begin{aligned} \underline{\text{Mômen phân phối:}} \quad \underline{\text{Mômen truyền:}} \\ \underline{M}_{CB,I} = -\gamma_{CB} M_{C,I}; \quad M_{BC,I} = \beta_{CB} \underline{M}_{CB,I} = -\frac{1}{2} \gamma_{BC} M_{C,I}; \\ \underline{M}_{CF,I} = -\gamma_{CF} M_{C,I}; \quad M_{FC,I} = \beta_{CF} \underline{M}_{CF,I} = -\frac{1}{2} \gamma_{CF} M_{C,I}. \end{aligned}$$

Lại chốt nút  $C$  ở vị trí cân bằng mới và chuyển sang tháo chốt ở nút  $F$ . Lúc này mômen làm cho nút không cân bằng trong chu trình  $I$  là  $M_{F,I}$  bao gồm các mômen: mômen nút cứng  $M^*_F$  sẵn có từ trước và mômen truyền  $M_{FC,I}$  mới tích lũy thêm tại nút  $F$  trong quá trình tháo chốt tại nút  $C$  là  $M_{CB,I}$ :

$$M_{F,I} = M^*_F + M_{FC,I}.$$

Dưới tác dụng của  $M_{F,I}$  nút  $F$  xoay tới vị trí cân bằng mới. Kết quả tính các mômen phân phối và mômen truyền ghi trên hình 9.7c.

Chốt nút  $F$  ở vị trí cân bằng mới và chuyển sang tháo chốt ở nút  $E$ . Lúc này, tại  $E$ , ngoài mômen nút cứng  $M^*_E$  sẵn có còn có mômen truyền từ nút  $B$  và nút  $F$  tới trong quá trình tháo chốt ở nút  $B$  và nút  $F$ . Gọi  $M_{E,I}$  là mômen tổng cộng tại  $E$  làm cho nút không cân bằng trong chu trình phân phối thứ nhất. Dưới tác dụng của  $M_{E,I}$  nút  $E$  bị xoay tới vị trí cân bằng mới. Áp dụng (9.12) và (9.13) ta sẽ xác định được các mômen phân phối và mômen truyền như đã ghi trên hình 9.7d.

Tiếp đó chốt nút  $E$  lại ở vị trí cân bằng mới.

Sau khi đã tháo và chốt tất cả các nút một lượt, ta thấy tại các đầu thanh, mômen được tích lũy dần dần. Chẳng hạn như ở đầu  $B$  thuộc thanh  $BE$ , tới giai đoạn này gồm có mômen phân phối khi tháo chốt ở nút  $B$  (hình 9.7a) và các mômen truyền từ nút  $C$ , nút  $E$  tới trong khi tháo chốt ở nút  $C$  và nút  $E$  (hình 9.7b và d).

Những mômen đó chưa phải là mômen cần tìm bởi vì ở trạng thái này tất cả các nút (trừ nút  $E$  vừa được tháo chốt) vẫn chưa được cân bằng nếu ta tháo tất cả các chốt ra. Thật vậy, chẳng hạn ở nút  $B$ , lúc này còn chịu hai mômen truyền từ nút  $C$  và nút  $E$  tới khi nút  $B$  còn bị chốt nên hai mômen này sẽ làm cho nút không cân bằng nếu ta tháo chốt.

Để cho các nút tiến tới cân bằng ta lại phải tiếp tục phân phối các mômen không cân bằng tích lũy trong quá trình trước. Lần phân phối thứ hai này gọi là *chu trình thứ hai*. Chu trình thứ hai cũng thực hiện như chu trình thứ nhất nhưng lúc này cân chú ý là mômen cân phân phối tại một nút nào đó, chẳng hạn nút  $B$  là  $M_{B,2}$  chỉ gồm các mômen truyền từ các nút lân cận tới chứ không bao gồm các mômen phân phối hay mômen nút cứng  $M^*_B$  vì những mômen này đã được phân phối từ chu trình thứ nhất.

Sau khi thực hiện chu trình thứ hai, nói chung ở các nút vẫn tồn tại mômen làm cho nút không cân bằng nhưng những mômen ở cuối chu trình thứ hai sẽ nhỏ hơn những mômen ở cuối chu trình thứ nhất. Thật vậy, mỗi lần phân phối mômen tại một nút ta đã nhân với một hệ số  $\gamma$  nhỏ hơn 1 và mỗi lần truyền mômen ta lại nhân với hệ số  $\beta$  nhỏ hơn 1 do đó mômen làm cho nút không cân bằng sẽ giảm xuống khá nhanh.

Cứ tiến hành tương tự như vậy đối với chu trình thứ ba, thứ tư v.v... cho tới khi các mômen làm cho nút không cân bằng trở thành không đáng kể nữa thì kết thúc.

Tất nhiên, mômen uốn tại các đầu thanh của hệ trên hình 9.5d chính là tổng đại số mômen phân phối và mômen truyền tích lũy dẫn trong các chu trình.

Để tìm mômen uốn tại các đầu thanh của hệ cho ban đầu ta chỉ cần lấy tổng đại số mômen nút cứng  $M^*$ , mômen phân phối và mômen truyền tích lũy dẫn trong các chu trình.

Rõ ràng là càng thực hiện nhiều chu trình bao nhiêu thì độ chính xác càng tăng bấy nhiêu.

Ta sẽ tìm hiểu thứ tự thực hiện thông qua ví dụ cụ thể.

**Ví dụ 9.1.** Vẽ biểu đồ mômen uốn cho hệ trên hình 9.8a.

1. Xác định độ cứng đơn vị quy ước của các thanh theo bảng 9.1:

$$R_{AB} = R_{CD} = EI / 4 = 0,25EI; \quad R_{BC} = R_{CF} = E \cdot 2I / 4 = 0,50EI; \quad R_{BF} = 0.$$

2. Xác định hệ số phân phối cho từng đầu thanh quy tụ vào các nút theo (9.14) và kiểm tra các hệ số phân phối theo điều kiện: tổng các hệ số phân phối xung quanh một nút phải bằng đơn vị.

- Tại nút  $B$ :  $\gamma_{BA} = 0,25EI / (0,25EI + 0,50EI) = 0,333$ ;

$$\gamma_{BC} = 0,50EI / (0,25EI + 0,50EI) = 0,667.$$

$$\text{Kiểm tra: } 0,333 + 0,667 = 1,000.$$

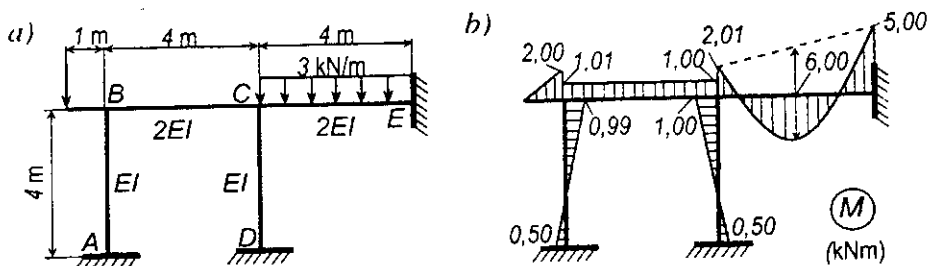


- Tại nút C:  $\gamma_{CB} = \gamma_{CE} = 0,50EI / (0,50EI + 0,50EI + 0,25EI) = 0,400$ ;  
 $\gamma_{CD} = 0,25EI / (0,50EI + 0,50EI + 0,25EI) = 0,200$ .  
 Kiểm tra:  $0,400 + 0,400 + 0,200 = 1,000$ .

3. Xác định các mômen nút cứng  $M^*$  tại các đầu thanh do tải trọng gây ra (sử dụng bảng 6.1 với chú ý áp dụng quy ước về dấu của phương pháp Cross). Trong trường hợp này, ta có:

$$M^*_{CE} = -M^*_{EC} = ql^2/12 = 3.4^2/12 = 4 \text{ kNm}; \quad M^*_{BF} = -2 \text{ kNm}.$$

Trên các thanh khác không có tải trọng nên không có mômen nút cứng.



Hình 9.8

4. Phân phối và truyền mômen. Quá trình phân phối và truyền mômen được thực hiện trên bảng tính (bảng 9.2). Cách lập bảng như sau:

- ❖ Hàng thứ nhất ghi ký hiệu các nút và các đầu thanh có liên kết ngàm, ngàm trượt (đối với đầu thanh có khớp không cần ghi vì mômen uốn tại đó luôn luôn bằng không).
- ❖ Hàng thứ hai ghi ký hiệu những đầu thanh quy tụ tại các nút tương ứng. Nút nào có bao nhiêu thanh quy tụ thì có bấy nhiêu cột.
- ❖ Hàng thứ ba ghi các hệ số phân phối tương ứng với các đầu thanh quy tụ vào nút (theo kết quả tính ở bước thứ hai). Dưới hàng thứ ba, kẻ đường hai nét để sau này khi cộng các mômen uốn khỏi lần với các hệ số phân phối.
- ❖ Hàng thứ tư ghi giá trị mômen nút cứng  $M^*$  tại các đầu thanh (theo kết quả tính ở bước 3).
- ❖ Từ hàng thứ năm về phía dưới ghi kết quả phân phối và truyền mômen lần lượt tương ứng với các nút được tháo chốt. Trên cột thứ nhất của mỗi hàng này ghi ký hiệu nút được tháo chốt.

Đối với bài toán đang xét, quá trình thực hiện như sau:

✦ **Chu trình 1:**

- Bất đầu tháo chốt tại nút C. Mômen không cân bằng:

$$M_{C,1} = M^*C = M^*CE = 4,000 \text{ kNm.}$$

Vận dụng các công thức (9.12) và (9.13) ta có:

Mômen phân phối:

Mômen truyền:

$$\underline{M}_{CB,1} = -0,4.4 = -1,60 \text{ kNm}; \quad M_{BC,1} = (1/2)(-1,60) = -0,80 \text{ kNm};$$

$$\underline{M}_{CE,1} = -0,4.4 = -1,60 \text{ kNm}; \quad M_{EC,1} = (1/2)(-1,60) = -0,80 \text{ kNm};$$

$$\underline{M}_{CD,1} = -0,2.4 = -0,80 \text{ kNm}; \quad M_{DC,1} = (1/2)(-0,80) = -0,40 \text{ kNm.}$$

Kiểm tra theo điều kiện tổng các mômen phân phối bằng mômen nút cứng nhưng trái dấu:  $-1,60 -1,60 -0,80 = -4,00 \text{ kNm.}$

Ghi các số liệu vào hàng thứ 5 trên bảng 9.2.

**Bảng 9.2**

Nút, ngâm	A			B			C			D	E
	AB	BF	BA	BC	CB	CE	CD	DC	EC		
$\gamma$		0,000	0,333	0,667	0,400	0,400	0,200				
$M^*$		-2,00				+4,00			-4,00		
C				-0,80	-1,60	-1,60	-0,80	-0,40	-0,80		
B	+0,47	0,00	+0,93	+1,87	+0,93						
C				-0,19	-0,37	-0,37	-0,19	-0,09	-0,19		
B	+0,03	0,00	+0,06	+0,13	+0,06						
C				-0,01	-0,02	-0,02	-0,01	-0,01	-0,01		
B		0,00	0,00	+0,01							
	+0,50 [+0,50]	-2,00 [-2,00]	+0,99 [+1,00]	+1,01 [+1,00]	-1,00 [-1,00]	+2,01 [+2,00]	-1,00 [-1,00]	-0,50 [-0,50]	-5,00 [-0,50]		

- Chốt nút C và chuyển sang tháo chốt tại nút B.

Mômen không cân bằng:  $M_{B,2} = -2,00 - 0,80 = -2,80 \text{ kNm.}$

Áp dụng công thức (9.12) và (9.13), ta được:

Mômen phân phối:

Mômen truyền:

$$\underline{M}_{BA,2} = -0,333(-2,80) = +0,93 \text{ kNm}; \quad M_{AB,2} = (1/2)0,93 = +0,47 \text{ kNm};$$

$$\underline{M}_{BC,2} = -0,667(-2,80) = +1,87 \text{ kNm}; \quad M_{CB,2} = (1/2)1,87 = +0,93 \text{ kNm.}$$

Ghi kết quả vào hàng 6 trên bảng 9.2.

Như đã biết, khi tháo chốt ở các nút trong chu trình thứ  $i$  nào đó thì nguyên nhân làm cho nút không cân bằng là các mômen truyền từ các nút khác tới trong chu trình thứ  $(i-1)$  chứ không phải mômen đã được phân phối. Bởi vậy, trong lần phân phối thuộc chu trình thứ  $i$  thì những mômen đã phân phối ở chu trình thứ  $(i-1)$  trở về trước sẽ không tham gia. Để tránh nhầm lẫn ta gạch chân những giá trị mômen phân phối. Điều đó có nghĩa là trong chu trình phân phối thứ  $i$  ta không xét đến những mômen ở phía trên kể từ giá trị gạch chân.

#### † Chu trình 2:

- Chốt nút  $B$  và tháo chốt ở nút  $C$

Mômen không cân bằng tại  $C$  là  $M_{C,2} = +0,93$  kNm. Ta có:

Mômen phân phối:

Mômen truyền:

$$M_{CB,2} = -0,4.0,93 = -0,37 \text{ kNm}; \quad M_{BC,2} = (1/2)(-0,37) = -0,19 \text{ kNm};$$

$$M_{CE,2} = -0,4.0,93 = -0,37 \text{ kNm}; \quad M_{EC,2} = (1/2)(-0,37) = -0,19 \text{ kNm};$$

$$M_{CD,2} = -0,2.0,93 = -0,19 \text{ kNm}; \quad M_{DC,2} = (1/2)(-0,19) = -0,09 \text{ kNm}.$$

- Chốt nút  $C$  và tháo chốt ở nút  $B$ .

Mômen không cân bằng  $M_{B,2} = -0,19$  kNm.

Mômen phân phối:

Mômen truyền:

$$M_{BA,2} = -0,333(-0,19) = +0,06 \text{ kNm}; \quad M_{AB,2} = (1/2).0,06 = +0,03 \text{ kNm};$$

$$M_{BC,2} = -0,667(-0,19) = +0,13 \text{ kNm}; \quad M_{CB,2} = (1/2).0,13 = +0,06 \text{ kNm}.$$

#### Chu trình 3:

- Chốt nút  $B$  và tháo chốt ở nút  $C$

Mômen không cân bằng tại  $C$  là  $M_{C,3} = +0,06$  kNm.

Mômen phân phối:

Mômen truyền:

$$M_{CB,3} = -0,4.0,06 = -0,024 \text{ kNm}; \quad M_{BC,3} = (1/2)(-0,024) = -0,01 \text{ kNm};$$

$$M_{CE,3} = -0,4.0,06 = -0,024 \text{ kNm}; \quad M_{EC,3} = (1/2)(-0,024) = -0,01 \text{ kNm};$$

$$M_{CD,3} = -0,2.0,06 = -0,012 \text{ kNm}; \quad M_{DC,3} = (1/2)(-0,012) = -0,01 \text{ kNm}.$$

- Chốt nút  $C$  và tháo chốt ở nút  $B$ .

Mômen không cân bằng  $M_{B,3} = -0,01$  kNm.

Mômen phân phối:

$$M_{BA,3} = -0,333(-0,01) = 0,00;$$

$$M_{BC,3} = -0,667(-0,01) = 0,01 \text{ kNm}.$$

Các mômen phân phối đã khá nhỏ, nếu tiếp tục truyền đi nữa thì mômen truyền lớn nhất chỉ bằng  $0,004$  kNm nên có thể bỏ qua được và dừng lại ở đây.

Cộng đại số tất cả các mômen trong mỗi cột trên bảng 9.2 (kể từ hàng thứ tư trở xuống) ta sẽ được mômen uốn tại các đầu thanh. Thật vậy, từ hình 9.5 ta thấy: mômen uốn trong hệ cho ban đầu (hình 9.5a) bằng mômen uốn trong hệ chịu tải trọng nhưng có các nút bị chốt (hình 9.5b hoặc 9.5c) ghi ở hàng thứ tư trên bảng 9.2, cộng với mômen uốn trong hệ chịu các mômen nút cứng đặt tại nút (hình 9.5d) là tổng các giá trị ghi từ hàng thứ năm trở xuống trên bảng 9.2. Các số liệu ghi trong đầu móc vuông là kết quả tính chính xác.

5. *Vẽ biểu đồ nội lực.* Sau khi biết mômen uốn tại các đầu thanh ta vẽ được các biểu đồ nội lực theo quy cách đã biết trong các chương 5 và 6 song cần lưu ý là quy ước về dấu của mômen uốn trong phương pháp này có khác trước.

Kết quả vẽ biểu đồ mômen uốn cho trường hợp này như trên hình 9.8b.

6. *Kiểm tra cân bằng nút.* Nút B:  $-2,00 + 0,99 + 1,01 = 0$  (cân bằng).

$$\text{Nút C: } -1,00 + 2,01 - 1,00 = 0,01 \approx 0.$$

Thực ra tại nút C vẫn chưa cân bằng mà còn phải nhận thêm một mômen không cân bằng là  $0,004$  kNm truyền từ nút B tới. Như vậy sai số tương đối lớn nhất so với mômen uốn bé nhất tại nút C là:

$$\frac{0,004}{1,00} \times 100 = 0,4\%.$$

**Chú thích:**

- \* Có thể bắt đầu tháo chốt ở nút nào trước cũng được. Tuy nhiên, nên chọn nút nào có mômen không cân bằng  $M'$  lớn nhất làm nút khởi điểm thì quá trình phân phối sẽ tất nhanh hơn. Thứ tự tháo chốt tại các nút trong mỗi chu trình có thể chọn bất kỳ.
- \* Cách tính hệ chịu tác dụng của các nguyên nhân khác cũng tương tự như cách tính với tải trọng trình bày ở trên. Các bước tính không có gì thay đổi. Riêng ở bước thứ ba, khi xác định các mômen nút cứng  $M'$  ta cần thực hiện giống như khi tìm biểu đồ ( $M^0_H$ ) đã trình bày trong mục 6.4 chương 6.
- \* Với những hệ có ngàm đàn hồi, cần quan niệm mỗi ngàm đàn hồi như một nút để thực hiện tính toán.

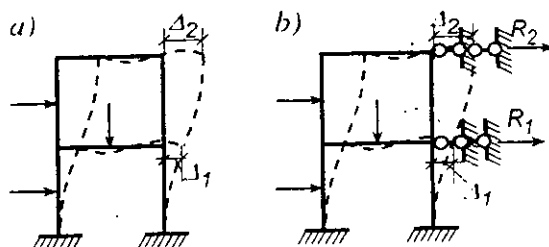
**D. Cách tính hệ có nút chuyển vị thẳng**

Hướng giải bài toán hệ có nút chuyển vị thẳng là *thay thế việc tính hệ có*

*n* chuyển vị thẳng độc lập bằng cách tính *n*+1 hệ có nút không chuyển vị thẳng.

Để trình bày được đơn giản ta lập luận với hệ trên hình 9.9. Tuy nhiên, lý luận vẫn mang tính tổng quát và áp dụng được cho hệ bất kỳ.

Các nút của hệ 9.9a có hai chuyển vị thẳng độc lập. Dưới tác dụng của tải trọng, hệ biến dạng theo đường đứt nét. Các nút thuộc tầng dưới chuyển vị ngang  $\Delta_1$ , các nút thuộc tầng hai chuyển vị ngang  $\Delta_2$ .



Hình 9.9

Để đưa hệ này về hệ có nút không chuyển vị thẳng ta cần đặt thêm hai liên kết loại một như trên hình 9.9b. Tất nhiên lúc này cách làm việc của hệ 9.9b và 9.9a sẽ khác nhau. Muốn cho hai hệ làm việc giống nhau ta cần gây ra trong hệ các chuyển vị cưỡng bức theo phương ngang tại các liên kết mới đặt thêm vào với giá trị vừa đúng bằng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ . Nói khác đi, cần cho những liên kết này chuyển vị cưỡng bức theo phương ngang, để sao cho phản lực trong những liên kết này bằng không, vì trên hệ 9.9a không tồn tại những liên kết đó tức là không tồn tại phản lực. Ta có điều kiện:

$$R_1 = 0; \quad R_2 = 0. \quad (9.15)$$

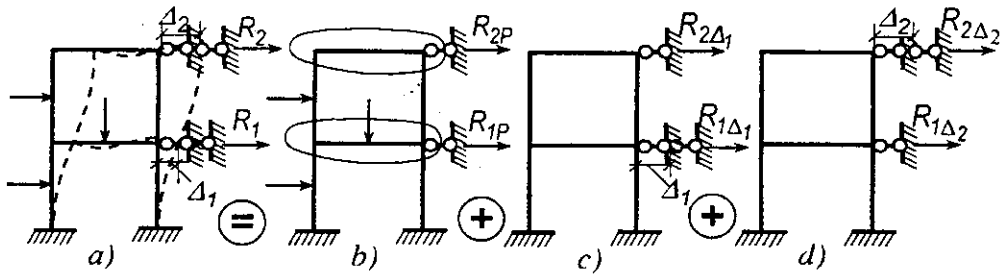
Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta thấy phản lực và nội lực trong hệ 9.9b (vẽ lại trên hình 9.10a) bằng tổng các phản lực và nội lực trong ba hệ:

- ✦ Hệ có nút không chuyển vị thẳng chịu tải trọng (hình 9.10b).
- ✦ Hệ có nút không chuyển vị thẳng, không chịu tải trọng, nhưng liên kết đặt thêm vào tại tầng một chịu chuyển vị cưỡng bức bằng  $\Delta_1$  (hình 9.10c).
- ✦ Hệ có nút không chuyển vị thẳng, không chịu tải trọng, nhưng liên kết đặt thêm vào tại tầng hai chịu chuyển vị cưỡng bức bằng  $\Delta_2$  (hình 9.10d).

Các điều kiện (9.15) có dạng:

$$R_1 = R_{1(P, \Delta_1, \Delta_2)} = R_{1P} + R_{1\Delta_1} + R_{1\Delta_2} = 0;$$

$$R_2 = R_{2(P, \Delta_1, \Delta_2)} = R_{2P} + R_{2\Delta_1} + R_{2\Delta_2} = 0. \quad (9.16)$$



Hình 9.10

Biểu đồ mômen uốn trong hệ 9.9b hay 9.10a là tổng các biểu đồ sau:

$$(M) = (M_P) + (M_{\Delta_1}) + (M_{\Delta_2}). \quad (9.17)$$

Trong (9.16) và (9.17):

$R_{kP}$  – phản lực tại liên kết đặt thêm vào thứ  $k$  do tải trọng gây ra trong hệ có nút không chuyển vị thẳng;

$(M_P)$  – biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong hệ có nút không chuyển vị thẳng;

$R_{k\Delta_m}$  – phản lực tại liên kết  $k$  do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết  $m$  có giá trị bằng  $\Delta_m$  gây ra.

$(M_{\Delta_m})$  – biểu đồ mômen uốn trong hệ có nút không chuyển vị thẳng do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết  $m$  có giá trị bằng  $\Delta_m$  gây ra.

Nhưng các chuyển vị  $\Delta_m$  chưa biết nên để cho tiện lợi trong tính toán ta biểu thị:

$$\Delta_m = k_m \delta_m, \quad (9.18)$$

trong đó  $\delta_m$  là chuyển vị tại liên kết  $m$  có giá trị chọn tùy ý (có thể chọn bằng đơn vị hay khác đơn vị) còn  $k_m$  là hệ số chưa biết, giữ vai trò ẩn số.

Đồng thời, nếu gọi:

$r_{km}$  – phản lực tại liên kết  $k$  do riêng chuyển vị cưỡng bức tại liên kết  $m$  có giá trị bằng  $\delta_m$  gây ra;

$(\bar{M}_m)$  – biểu đồ mômen uốn trong hệ có nút không chuyển vị thẳng do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết  $m$  có giá trị bằng  $\delta_m$  gây ra,

thì theo nguyên lý cộng tác dụng, ta có:

$$R_{k\Delta_m} = r_{km} k_m; \quad (9.19)$$

$$(M_{\Delta_m}) = (\bar{M}_m) k_m. \quad (9.20)$$

Thay (9.19) vào (9.16) và (9.20) vào (9.17) ta được:

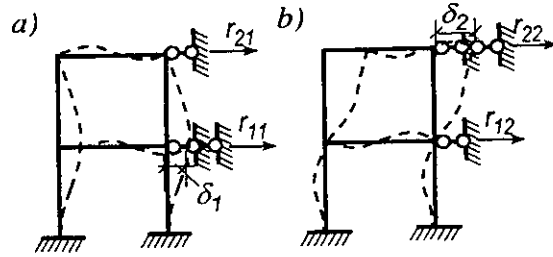
$$\begin{aligned} \text{+ Hệ phương trình:} \quad R_{1P} + r_{11} k_1 + r_{12} k_2 &= 0; \\ R_{2P} + r_{21} k_1 + r_{22} k_2 &= 0. \end{aligned} \quad (9.21)$$

$$\text{+ Biểu đồ mômen uốn:} \quad (M) = (M_P) + k_1(\bar{M}_1) + k_2(\bar{M}_2). \quad (9.22)$$

Qua biểu thức (9.22) ta thấy biểu đồ mômen uốn (hay giá trị mômen uốn) trong hệ cho ban đầu bằng tổng các biểu đồ (hay các giá trị):

◇ Biểu đồ (hay giá trị) mômen uốn trong hệ có nút không chuyển vị thẳng chịu tải trọng đã cho. Cách tính hệ này đã được nghiên cứu ở điểm 9.1.C.

◇ Biểu đồ (hay giá trị) mômen uốn ( $\bar{M}_1$ ) nhân với hệ số  $k_1$ . Cách tìm ( $\bar{M}_1$ ) được thực hiện như ở điểm 9.1.C, trong hệ có nút không chuyển vị thẳng do liên kết tựa thuộc tầng một chuyển vị cưỡng bức với giá trị tùy ý  $\delta_1$  gây ra (hình 9.11a).



Hình 9.11

◇ Biểu đồ (hay giá trị) mômen uốn ( $\bar{M}_2$ ) nhân với hệ số  $k_2$ . Cách tìm ( $\bar{M}_2$ ) được thực hiện như ở điểm 9.1.C, trong hệ có nút không chuyển vị thẳng do liên kết tựa thuộc tầng hai chuyển vị cưỡng bức với giá trị tùy ý  $\delta_2$  gây ra (hình 9.11b).

Như vậy, vấn đề còn phải giải quyết là tìm các hệ số  $k_1$  và  $k_2$ . Các hệ số này là nghiệm của hệ phương trình (9.21). Sau khi tính các hệ 9.10b, 9.11a và 9.11b, thực hiện các mặt cắt ta sẽ tìm được  $r_{km}$  và  $R_{kP}$  là những hệ số và số hạng tự do của (9.21). Giải hệ phương trình (9.21) ta sẽ xác định được  $k_1, k_2$ .

Trong trường hợp tổng quát, các nút của hệ có  $n$  chuyển vị thẳng độc lập thì các biểu thức (9.21) và (9.22) có dạng:

$$R_{iP} + r_{i1} k_1 + r_{i2} k_2 + \dots + r_{in} k_n = 0 \quad (9.23)$$

với  $i = 1, 2, \dots, n;$

$$(M) = (M_P) + k_1(\bar{M}_1) + k_2(\bar{M}_2) + \dots + k_i(\bar{M}_i) + \dots + k_n(\bar{M}_n). \quad (9.24)$$

**Chú thích:**

- \* Nếu cho  $\delta_k = \delta_m$  thì  $r_{km} = r_{mk}$ .
- \* Trường hợp hệ cho ban đầu có các thanh đứng không song song hoặc chịu tác dụng của các nguyên nhân khác, nguyên tắc tính toán vẫn không có gì thay đổi, song cần chú ý là khi xác định mômen nút cứng tại các đầu thanh ta cần thực hiện những yêu cầu tương tự như khi vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị (xem các mục 6.3, 6.4 trong chương 6).
- \* Với những hệ có liên kết thanh đàn hồi, nguyên tắc tính toán vẫn không có gì thay đổi, song trong khâu xác định các phản lực cần chú ý là có sự tham gia của các phản lực trong liên kết thanh đàn hồi.
- \* Ngoài cách tính vừa trình bày trên, bạn đọc có thể tìm hiểu thêm cách tính khác không yêu cầu phải giải hệ phương trình đại số (xem [2], [12]).

Ta sẽ tìm hiểu thứ tự thực hiện thông qua ví dụ.

**Ví dụ 9.2.** Vẽ biểu đồ mômen uốn cho khung trên hình 9.12a,  $EI = const$ .

Khung đã cho có tính chất đối xứng. Sau khi phân tích tải trọng thành đối xứng và phản xứng ta thấy:

- ✦ Trường hợp tải trọng tác dụng đối xứng: trong hệ không phát sinh mômen uốn mà chỉ có lực nén 2,5 kN trong thanh  $CC'$  vì ta bỏ qua biến dạng dọc trục. Biểu đồ mômen uốn trong trường hợp này bằng không.
- ✦ Trường hợp tải trọng tác dụng phản xứng: chỉ cần tính với nửa hệ như trên hình 9.12b. Hệ có hai chuyển vị thẳng độc lập.

Để tính hệ 9.12b ta thực hiện theo thứ tự như sau:

1. Xác định độ cứng đơn vị quy ước của các thanh:

$$R_{AB} = R_{BC} = EI / l = EI / 5; \quad R_{BE} = R_{CD} = 3EI / 4l = 3EI / 10.$$

2. Xác định các hệ số phân phối:

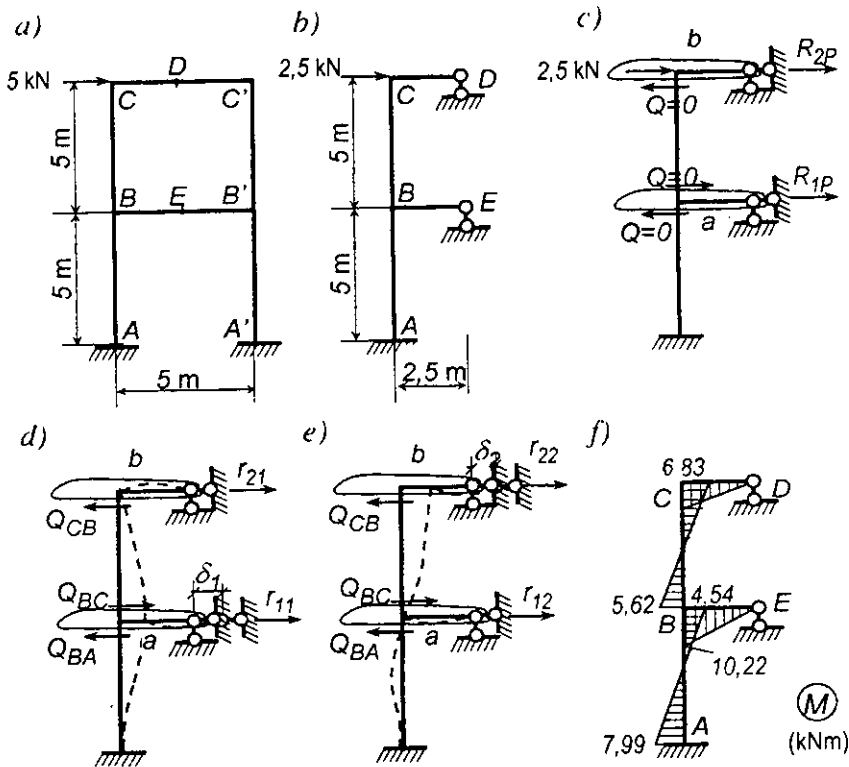
$$\text{Nút C:} \quad \gamma_{CB} = \frac{EI / 5}{(EI / 5) + (3EI / 10)} = 0,4;$$

$$\gamma_{CB} = \frac{3EI / 10}{(EI / 5) + (3EI / 10)} = 0,6.$$

$$\text{Nút B:} \quad \gamma_{BA} = \gamma_{BC} = \frac{EI / 5}{(EI / 5) + (EI / 5) + (3EI / 10)} = 0,268;$$



$$\gamma_{CB} = \frac{3EI/10}{(EI/5) + (EI/5) + (3EI/10)} = 0,428.$$



Hình 9.12

3. Tính hệ có nút không chuyển vị thẳng chịu tải trọng (hình 9.12c):

Vì tải trọng đặt ở nút nên các mômen nút cứng đều bằng không. Do đó mômen uốn trên tất cả các thanh cũng bằng không (trong trường hợp đặc biệt này ta không cần lập bảng phân phối). Thực hiện các mặt cắt a và b (hình 9.12c); dễ dàng xác định được  $R_{1P} = 0$ ;  $R_{2P} = -2,5$  kN.

4. Tính hệ có nút không chuyển vị thẳng chịu chuyển vị cưỡng bức:

a) Liên kết đặt thêm tại tầng 1 chuyển vị thẳng theo phương ngang với giá trị chọn tùy ý  $\delta_1$  (hình 9.12d).

- Xác định các mômen nút cứng: tưởng tượng chốt các nút và cho liên kết đặt tại tầng 1 chuyển vị với giá trị  $\delta_1$ , sử dụng bảng 6.2, ta có:

$$M^*_{AB} = M^*_{BA} = 6EI\delta_1 / l^2; \quad M^*_{BC} = M^*_{CB} = -6EI\delta_1 / l^2$$

Nếu chọn  $\delta_1 = l^2 / 6EI$  thì  $M^*_{AB} = M^*_{BA} = 1$ ;  $M^*_{BC} = M^*_{CB} = -1$

- Lập bảng phân phối mômen (bảng 9.3).
- Xác định các phản lực  $r_{11}$  và  $r_{21}$ . Căn cứ vào các số liệu tìm được trong bảng 9.3, xác định lực cắt trong các thanh đứng:

$$Q_{BA} = (0,970 + 0,941) / 5 = 0,382;$$

$$Q_{BC} = Q_{CB} = (-0,853 - 0,618) / 5 = -0,294.$$

Thực hiện các mặt cắt  $a, b$  (hình 9.12d), từ phương trình cân bằng hình chiếu theo phương ngang, ta được:

$$r_{11} = Q_{BA} - Q_{BC} = 0,382 + 0,294 = 0,676; \quad r_{21} = Q_{CB} = -0,294.$$

**Bảng 9.3**

Nút, ngàm	A		B		C	
Đầu thanh	AB	BA	BE	BC	CB	CD
$\gamma$		0,286	0,428	0,286	0,400	0,600
$M^*$	+ 1,000	+ 1,000		- 1,000	- 1,000	
C				+ 0,200	+ 0,400	+ 0,600
B	- 0,029	- 0,057	- 0,086	- 0,057	- 0,029	
C				+ 0,006	+ 0,012	+ 0,017
B	- 0,001	- 0,002	- 0,002	- 0,002	- 0,001	
C					+ 0,000	+ 0,001
	+ 0,970	+ 0,941	- 0,088	- 0,853	- 0,618	+ 0,618

b) Liên kết đặt thêm tại tầng 2 chuyển vị thẳng với giá trị chọn tùy ý  $\delta_2$  (hình 9.12e)

- Xác định các mômen nút cứng:  $M^*_{BC} = M^*_{CB} = 6EI\delta_2 / l^2$ .

Nếu chọn  $\delta_2 = l^2 / 6EI$  thì  $M^*_{BC} = M^*_{CB} = 1$ .

- Lập bảng phân phối mômen (bảng 9.4).
- Xác định các phản lực  $r_{12}$  và  $r_{22}$ . Theo các số liệu trong bảng 9.4, xác định lực cắt trong các thanh đứng.

$$Q_{CB} = Q_{BC} = (0,530 + 0,587) / 5 = 0,224;$$

$$Q_{BA} = (-0,117 - 0,236) / 5 = -0,071.$$

Thực hiện các mặt cắt  $a, b$  (hình 9.12e), từ phương trình cân bằng hình chiếu theo phương ngang, ta được:

$$r_{12} = Q_{BA} - Q_{BC} = -0,071 - 0,224 = -0,295; \quad r_{22} = Q_{CB} = 0,224.$$

**Bảng 9.4**

Nút, ngàm	A		B		C	
Đầu thanh	AB	BA	BE	BC	CB	CD
$\gamma$		0,286	0,428	0,286	0,400	0,600
$M^*$				+ 1,000	+ 1,000	
C				- 0,200	- 0,400	- 0,600
B	- 0,114	- 0,229	- 0,342	- 0,229	- 0,114	
C				+ 0,023	+ 0,046	+ 0,068
B	- 0,003	- 0,007	- 0,010	- 0,007	- 0,003	
C					+ 0,001	+ 0,002
	- 0,117	- 0,236	- 0,352	+ 0,586	+ 0,530	- 0,530

5. Thiết lập và giải hệ phương trình xác định các hệ số  $k$

$$0 + 0,676 k_1 - 0,294 k_2 = 0; \quad - 2,5 - 0,294 k_1 + 0,224 k_2 = 0.$$

$$\text{Nghiem: } k_1 = 11,4; \quad k_2 = 26,2.$$

6. Xác định mômen uốn tại các đầu thanh trong hệ cho ban đầu

Quá trình tính toán được thực hiện trên bảng 9.5. Các giá trị  $\bar{M}_1$  và  $\bar{M}_2$  lấy theo bảng 9.3 và 9.4.

**Bảng 9.5**

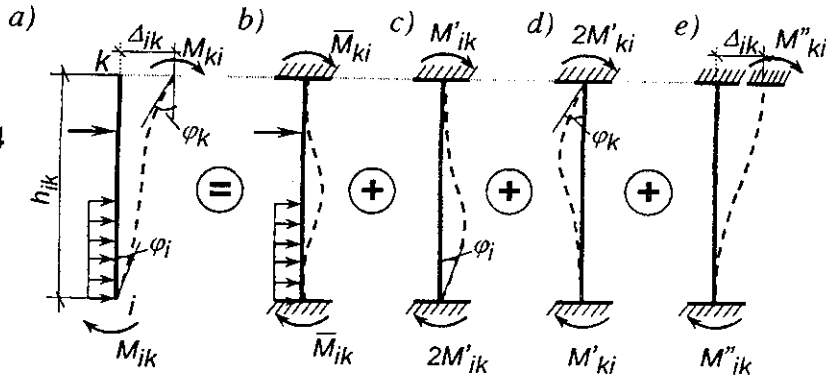
Đầu thanh	AB	BA	BE	BC	CB	CD
$M_p$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$k_1 \bar{M}_1 = 11,4 \bar{M}_1$	+ 11,05	+ 10,72	- 1,00	- 9,73	- 7,05	+ 7,05
$k_2 \bar{M}_2 = 26,2 \bar{M}_2$	- 3,06	- 6,18	- 9,22	+ 15,35	+ 13,88	- 13,88
$M = M_p + k_1 \bar{M}_1 + k_2 \bar{M}_2$	+ 7,99 [7,95]	+ 4,54 [4,55]	- 10,22 [10,23]	+ 5,62 [5,68]	+ 6,83 [6,82]	- 6,83 [6,82]

Các số liệu ghi trong dấu móc vuông là kết quả tính chính xác.

Biểu đồ mômen uốn vẽ cho nửa khung bên trái như trên hình 9.12f. Từ đó ta dễ dàng suy ra biểu đồ mômen uốn cho nửa bên phải khung theo nguyên tắc phản xứng.



Hình 9.14



- 1) Các đầu  $i, k$  của thanh bị ngàm, dưới tác dụng của tải trọng đặt trên thanh, thanh bị biến dạng. Tại đầu  $i$  và  $k$  của thanh phát sinh các mômen  $\bar{M}_{ik}$  và  $\bar{M}_{ki}$  (hình 9.14b).
- 2) Đầu  $k$  của thanh bị ngàm còn đầu  $i$  xoay cưỡng bức với góc  $\varphi_i$ . Như đã biết (xem bảng 6.2), khi thanh biến dạng, nếu tại đầu  $k$  (không bị xoay) phát sinh mômen uốn biểu thị bằng  $M'_{ik}$  thì tại đầu  $i$  (bị xoay) phát sinh mômen uốn có giá trị lớn gấp đôi  $M'_{ik}$  biểu thị bằng  $2M'_{ik}$  (hình 9.14c). Đối chiếu với số liệu cho trong bảng 6.2 ta thấy  $M'_{ik}$  phụ thuộc  $\varphi_i$  và bằng  $2R_{ik}\varphi_i$  với  $R_{ik}$  được xác định theo bảng 9.1.
- 3) Đầu  $i$  của thanh bị ngàm còn đầu  $k$  xoay cưỡng bức với góc  $\varphi_k$ . Tương tự như trên, lúc này tại đầu  $i$  và  $k$  phát sinh các mômen  $M'_{ki}$  và  $2M'_{ki}$  (hình 9.14d).
- 4) Hai đầu  $i, k$  chuyển vị thẳng tương đối là  $\Delta_{ik}$  theo phương vuông góc với trục ban đầu của thanh. Tại đầu  $i$  và  $k$  phát sinh các mômen  $M''_{ik}$  và  $M''_{ki}$  (hình 9.14e). Từ bảng 6.2 ta thấy  $M''_{ik} = M''_{ki} = 6R_{ik}\Delta_{ik} / h_{ik}$ .

Cũng lập luận tương tự cho trường hợp đầu  $k$  của thanh có dạng liên kết khác.

Theo nguyên lý cộng tác dụng, mômen tại đầu  $i$  và  $k$  của thanh  $ik$  được xác định như sau:

❖ Khi thanh  $ik$  có hai đầu là nút hoặc ngàm đàn hồi:

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \bar{M}_{ik} + 2M'_{ik} + M'_{ki} + M''_{ik}; \\ M_{ki} &= \bar{M}_{ki} + M'_{ik} + 2M'_{ki} + M''_{ki}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

❖ Khi thanh  $ik$  có đầu  $i$  là nút còn đầu  $k$  là ngàm cứng: Trong trường hợp này, đầu  $k$  bị ngàm cứng nên không có chuyển vị xoay, do đó  $M'_{ki} = 0$ . Công thức (9.25) vẫn nghiệm đúng với chú ý cho  $M'_{ki} = 0$ .

❖ Khi thanh  $ik$  có đầu  $i$  là nút còn đầu  $k$  là khớp:

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \bar{M}_{ik} + 2M'_{ik} + M''_{ik}; \\ M_{ki} &= 0. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Đối chiếu với số liệu trong bảng 6.2 và 9.1, trong trường hợp này ta thấy:

$$M'_{ik} = 2R_{ik}\varphi_i; \quad M''_{ik} = 4R_{ik}\Delta_{ik} / h_{ik}.$$

❖ Khi thanh  $ik$  có đầu  $i$  là nút còn đầu  $k$  là ngàm trượt cho phép đầu  $k$  chuyển vị thẳng tự do theo phương vuông góc với trục thanh: Trong trường hợp này ta có  $M'_{ki} = 0$  và  $M''_{ki} = M''_{ik} = 0$ . Công thức (9.25) áp dụng cho trường hợp này có dạng:

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \bar{M}_{ik} + 2M'_{ik}; \\ M_{ki} &= \bar{M}_{ki} - 2M'_{ik}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Đối chiếu với số liệu trong bảng 6.2 và 9.1 ta thấy:  $M'_{ik} = 2R_{ik}\varphi_i$ .

Các đại lượng  $\bar{M}_{ik}$  và  $\bar{M}_{ki}$  trong (9.25), (9.26) và (9.27) biểu thị mômen uốn do tải trọng gây ra tại các đầu thanh tương ứng với điều kiện liên kết đã chỉ định và được xác định theo bảng 6.1. Như vậy, muốn xác định  $M_{ik}$  ta cần phải xác định các mômen  $M'_{ik}$ ,  $M'_{ki}$  do các chuyển vị xoay  $\varphi_i$  và  $\varphi_k$  gây ra (gọi là các mômen do xoay) và mômen  $M''_{ik}$  do chuyển vị thẳng tương đối  $\Delta_{ik}$  gây ra (gọi là mômen do chuyển vị thẳng).

### B. Công thức tính mômen do xoay $M'_{ik}$

Để lập công thức tìm  $M'_{ik}$  ta cần khảo sát điều kiện cân bằng mômen tại nút bất kỳ thứ  $i$ . Mômen uốn tại các đầu thanh quy tụ tại nút  $i$  được xác định theo công thức đầu của (9.25), (9.26), (9.27) trong đó, công thức đầu của (9.25) được xem là tổng quát. Do đó, khi lập các công thức ta có thể sử dụng công thức đầu của (9.25) đại diện cho mọi trường hợp thanh với chú ý là  $M'_{ki}$ ,  $M''_{ki}$ ,  $M''_{ik}$  tồn tại hoặc bằng không tùy theo điều kiện liên kết ở đầu đối diện.

Từ điều kiện cân bằng mômen tại nút  $i$ : tổng đại số mômen tác dụng tại đầu các thanh  $ik$  quy tụ tại  $i$  phải bằng không, ta có:

$$\sum_{(i)} M_{ik} = \sum_{(i)} \bar{M}_{ik} + 2 \sum_{(i)} M'_{ik} + \sum_{(i)} M'_{ki} + \sum_{(i)} M''_{ik} = 0.$$

Các dấu tổng áp dụng cho tất cả các thanh quy tụ tại nút  $i$ .

Ký hiệu: 
$$\bar{M}_i = \sum_{(i)} \bar{M}_{ik}.$$

Từ điều kiện cân bằng trên ta suy ra:

$$\sum_{(i)} M'_{ik} = -\frac{1}{2} [\bar{M}_i + \sum_{(i)} (M'_{ki} + M''_{ik})].$$

Vế trái biểu thị tổng các mômen do xoay tại nút  $i$ . Tổng mômen này sẽ phân phối vào đầu các thanh quy tụ tại nút  $i$  theo công thức phân phối mômen đã thiết lập trong 9.1.B.

$$M'_{ik} = -\frac{1}{2} \gamma_{ik} [\bar{M}_i + \sum_{(i)} (M'_{ki} + M''_{ik})],$$

với  $\gamma_{ik}$  là hệ số phân phối vào thanh  $ik$ , xác định theo (9.14).

Công thức tính mômen do xoay  $M'_{ik}$  được viết dưới dạng:

$$M'_{ik} = \mu_{ik} [\bar{M}_i + \sum_{(i)} (M'_{ki} + M''_{ik})], \quad (9.28)$$

trong đó:

$$\mu_{ik} = -\frac{1}{2} \gamma_{ik} = -\frac{R_{ik}}{2 \sum_{(i)} R_{ik}} \quad (9.29)$$

là hệ số phân phối mômen do xoay tại đầu  $i$  của thanh  $ik$  quy tụ ở nút  $i$  (còn gọi là hệ số xoay).

Lấy tổng các hệ số xoay quanh nút  $i$ , ta có điều kiện kiểm tra kết quả tính  $\mu_{ik}$ :

$$\sum_{(i)} \mu_{ik} = -\frac{\sum_{(i)} R_{ik}}{2 \sum_{(i)} R_{ik}} = -\frac{1}{2}. \quad (9.30)$$

### C. Công thức tính mômen do chuyển vị thẳng $M''_{ik}$

Công thức tính mômen do chuyển vị thẳng chỉ liên quan trực tiếp đến các thanh đứng. Trong thực tế, các thanh đứng thường là thanh có hai đầu là nút (ngàm) hoặc thanh có một đầu là nút còn một đầu là khớp. Giả sử các

thanh đứng thuộc tầng  $r$  bao gồm  $n_1$  thanh có hai đầu là nút (ngàm) và  $n_2$  thanh có đầu  $i$  là nút còn đầu  $k$  là khớp. Xét điều kiện cân bằng của phần hệ bên trên mặt cắt ngang đi qua tầng  $r$  có thanh đứng  $ik$  đang xét (hình 9.13), ta có:

$$\sum_{n_1} P_{ng} - \sum_{n_1} Q_{ik} - \sum_{n_2} Q_{ik} = 0, \quad (9.31)$$

trong đó:

$\sum P_{ng}$  – tổng đại số các hình chiếu theo phương  $x$  của tất cả các tải trọng tác dụng trên phần hệ được cắt ra để xét (phần trên tầng thứ  $r$ ) với quy ước *chiều dương hướng từ trái sang phải*;

$\sum_{n_1} Q_{ik}$  và  $\sum_{n_2} Q_{ik}$  – lần lượt là tổng đại số lực cắt trong các thanh đứng  $ik$  có

hai đầu là nút (ngàm) và trong các thanh đứng  $ik$  có đầu  $i$  là nút còn đầu  $k$  là khớp, thuộc tầng  $r$  bị cắt. Quy ước *chiều dương của lực cắt là chiều làm cho phần bị cắt có xu hướng quay thuận chiều kim đồng hồ*.

Với quy ước về dấu của mômen theo phương pháp G. Kani, lực cắt trong thanh đứng  $ik$  được xác định như sau:

❖ Thanh có hai đầu là nút (ngàm): 
$$Q_{ik} = Q_{ik}^d - \frac{M_{ik} + M_{ki}}{h_{ik}}; \quad (9.32)$$

❖ Thanh có đầu  $i$  là nút còn đầu  $k$  là khớp: 
$$Q_{ik} = Q_{ik}^d - \frac{M_{ik}}{h_{ik}}, \quad (9.33)$$

trong đó:

$Q_{ik}^d$  – lực cắt do tải trọng tác dụng trong thanh  $ik$  khi coi thanh  $ik$  là dầm i đặt tự do trên hai khớp tựa;

$h_{ik}$  – chiều cao của thanh đứng  $ik$  thuộc tầng  $r$ .

Các mômen  $M_{ik}$  và  $M_{ki}$  được xác định theo (9.25) hoặc (9.26). Thay (9.25) và (9.26) vào (9.32) và (9.33), tiếp đó thay kết quả tìm được vào điều kiện cân bằng (9.31), ta được:

$$\begin{aligned} & \sum P_{ng} - \left[ \sum_{n_1} Q_{ik}^d + \sum_{n_2} Q_{ik}^d \right] + \left[ \sum_{n_1} \frac{1}{h_{ik}} (\bar{M}_{ik} + \bar{M}_{ki}) + \sum_{n_2} \frac{1}{h_{ik}} \bar{M}_{ik} \right] + \\ & + \left[ \sum_{n_1} \frac{3}{h_{ik}} (M'_{ik} + M'_{ki}) + \sum_{n_2} \frac{2}{h_{ik}} M'_{ik} \right] + \left[ \sum_{n_1} \frac{2}{h_{ik}} M''_{ik} + \sum_{n_2} \frac{1}{h_{ik}} M''_{ik} \right] = 0. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Ba số hạng đầu của (9.34) biểu thị hiệu của thành phần tải trọng theo phương ngang ở phần trên tầng  $r$  với lực cắt do tải trọng gây ra trong tầng  $r$  nếu coi các nút của hệ không chuyển vị. Ký hiệu đại lượng này là  $Q_r$ .



$$Q_r = \sum P_{ng} - \left[ \sum_{n_1} Q_{ik}^d + \sum_{n_2} Q_{ik}^d \right] + \left[ \sum_{n_1} \frac{1}{h_{ik}} (\bar{M}_{ik} + \bar{M}_{ki}) + \sum_{n_2} \frac{1}{h_{ik}} \bar{M}_{ik} \right].$$

Nếu chú ý là khi thanh có đầu  $k$  là khớp thì  $M_{ki} = 0$ , ta có thể viết công thức  $Q_r$  dưới dạng tổng quát hơn như sau:

$$Q_r = \sum P_{ng} - \sum_{(r)} Q_{ik}^d + \sum_{(r)} \frac{1}{h_{ik}} (\bar{M}_{ik} + \bar{M}_{ki}). \quad (9.35)$$

Dấu tổng theo  $r$  áp dụng cho tất cả các thanh đứng thuộc tầng  $r$ .

Ta dễ dàng xác định được  $Q_r$  theo các số liệu đã cho trong bảng 6.1.

Để có được công thức tổng quát áp dụng cho trường hợp các thanh đứng thuộc tầng  $r$  có chiều cao khác nhau và điều kiện liên kết khác nhau, ta sử dụng các hệ số sau:

❖ Thanh có hai đầu là nút (ngàm):

$$\alpha_{ik} = h_r / h_{ik}; \quad m_{ik} = 1; \quad (9.36)$$

❖ Thanh có một đầu là nút còn một đầu là khớp:

$$\alpha_{ik} = 2h_r / 3h_{ik}; \quad m_{ik} = 3/4, \quad (9.37)$$

trong đó:

$h_r$  – chiều cao chung của tầng  $r$ , thường chọn là chiều cao của những thanh đứng bằng nhau chiếm đa số trong tầng;

$\alpha_{ik}$  – hệ số quy đổi phụ thuộc chiều cao và điều kiện liên kết của thanh đứng  $ik$ ;

$m_{ik}$  – hệ số phụ thuộc điều kiện liên kết của thanh đứng  $ik$ .

Số hạng thứ tư của (9.34) được biến đổi như sau:

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{n_1} \frac{3}{h_{ik}} (M'_{ik} + M'_{ki}) + \sum_{n_2} \frac{2}{h_{ik}} M'_{ik} \right] &= \sum_{n_1} \frac{3}{h_r} \alpha_{ik} (M'_{ik} + M'_{ki}) + \sum_{n_2} \frac{3}{h_r} \alpha_{ik} M'_{ik} = \\ &= \frac{3}{h_r} \sum_{(r)} \alpha_{ik} (M'_{ik} + M'_{ki}). \end{aligned}$$

Số hạng cuối của (9.34) được biến đổi như sau:

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{n_1} \frac{2}{h_{ik}} M''_{ik} + \sum_{n_2} \frac{1}{h_{ik}} M''_{ik} \right] &= \sum_{n_1} \frac{2}{h_r} \alpha_{ik} M''_{ik} + \sum_{n_2} \frac{3}{2h_r} \alpha_{ik} \frac{4}{4} M''_{ik} = \\ &= \frac{2}{h_r} \left[ \sum_{n_1} \alpha_{ik} \cdot 1 \cdot M''_{ik} + \sum_{n_2} \alpha_{ik} \frac{3}{4} M''_{ik} \right] = \\ &= \frac{2}{h_r} \left[ \sum_{n_1} \alpha_{ik} m_{ik} M''_{ik} + \sum_{n_2} \alpha_{ik} m_{ik} M''_{ik} \right] = \frac{2}{h_r} \sum_{(r)} \alpha_{ik} m_{ik} M''_{ik}. \end{aligned}$$

Điều kiện (9.34) có dạng

$$Q_r + \frac{3}{h_r} \sum_{(r)} \alpha_{ik} (M'_{ik} + M'_{ki}) + \frac{2}{h_r} \sum_{(r)} \alpha_{ik} m_{ik} M''_{ik} = 0. \quad (9.38)$$

Nhân cả hai vế với  $h_r/3$  và gọi:

$$M_r = \frac{Q_r h_r}{3} \quad (9.39)$$

là mômen tầng thứ  $r$ .

Từ (9.38) và (9.39) ta suy ra:

$$\sum_{(r)} \alpha_{ik} m_{ik} M''_{ik} = -\frac{3}{2} \left[ M_r + \sum_{(r)} \alpha_{ik} (M'_{ik} + M'_{ki}) \right]. \quad (9.40)$$

Vế trái của (9.40) biểu thị tổng các mômen do chuyển vị thẳng tại đầu  $i$  của các thanh  $ik$  thuộc tầng  $r$ . Đại lượng này sẽ được phân phối vào từng thanh đứng của tầng  $r$ .

Để lập công thức tính mômen  $M''_{ik}$  cho từng thanh ta cần sử dụng các số liệu trong bảng 6.2, xác định mômen do chuyển vị thẳng tương đối  $\Delta_{ik}$  theo phương vuông góc với trục thanh  $ik$ , tương ứng với hai trường hợp sau:

❖ Thanh có hai đầu là nút (ngàm):

$$M''_{ik} = M''_{ki} = -\frac{6EI_{ik}}{h_{ik}^2} \Delta_{ik} = -6R_{ik} \alpha_{ik} \frac{\Delta_{ik}}{h_r}$$

❖ Thanh có một đầu là nút còn một đầu là khớp:

$$M''_{ik} = -\frac{3EI_{ik}}{h_{ik}^2} \Delta_{ik} = -\frac{3EI_{ik}}{4h_{ik}} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3h_{ik}} \Delta_{ik} = -6R_{ik} \alpha_{ik} \frac{\Delta_{ik}}{h_r}$$

Như vậy, công thức xác định  $M''_{ik}$  đều có một dạng chung cho cả hai loại thanh. Vì các thanh đứng của hệ song song nên các chuyển vị thẳng tương đối  $\Delta_{ik}$  như nhau trong mỗi tầng, chiều cao  $h_r$  thuộc tầng  $r$  là đại lượng không đổi nên tỷ số

$$\frac{M''_{ik}}{R_{ik} \alpha_{ik}} = -6 \frac{\Delta_{ik}}{h_r} \quad (9.41)$$

không đổi với mọi thanh thuộc tầng thứ  $r$ .

Lập tổng các mômen do chuyển vị thẳng tại đầu  $i$  của các thanh  $ik$  thuộc tầng thứ  $r$  và chú ý đến (9.40), ta có:

$$\sum_{(r)} \alpha_{ik} m_{ik} M''_{ik} = -6 \frac{\Delta_{ik}}{h_r} \sum_{(r)} \alpha_{ik}^2 m_{ik} R_{ik} = -\frac{3}{2} \left[ M_r + \sum_{(r)} \alpha_{ik} (M'_{ik} + M'_{ki}) \right].$$

Suy ra: 
$$\frac{-\frac{3}{2} \left[ M_r + \sum_{(r)} \alpha_{ik} (M'_{ik} + M'_{ki}) \right]}{\sum_{(r)} \alpha_{ik}^2 m_{ik} R_{ik}} = -\theta \frac{\Delta_{ik}}{h_r} \quad (9.42)$$

Đối chiếu (9.41) và (9.42) ta sẽ được công thức xác định  $M''_{ik}$  trong thanh  $ik$  bất kỳ thuộc tầng thứ  $r$ :

$$M''_{ik} = -\frac{3}{2} \frac{\alpha_{ik} R_{ik}}{\sum_{(r)} \alpha_{ik}^2 m_{ik} R_{ik}} \left[ M_r + \sum_{(r)} \alpha_{ik} (M'_{ik} + M'_{ki}) \right].$$

Hay 
$$M''_{ik} = v_{ik} \left[ M_r + \sum_{(r)} \alpha_{ik} (M'_{ik} + M'_{ki}) \right], \quad (9.43)$$

với

$$v_{ik} = -\frac{3}{2} \frac{\alpha_{ik} R_{ik}}{\sum_{(r)} \alpha_{ik}^2 m_{ik} R_{ik}}, \quad (9.44)$$

$v_{ik}$  là hệ số phân phối do chuyển vị thẳng của thanh  $ik$  (còn gọi là hệ số chuyển vị thẳng).

Từ (9.44) ta dễ dàng suy ra điều kiện kiểm tra các hệ số  $v_{ik}$ :

$$\sum_{(r)} m_{ik} \alpha_{ik} v_{ik} = -\frac{3}{2}. \quad (9.45)$$

Như vậy, để tính trị số mômen uốn  $M_{ik}$  ở đầu các thanh ta cần phải tính được các mômen do chuyển vị xoay  $M'_{ik}$  theo công thức (9.28) và mômen do chuyển vị thẳng  $M''_{ik}$  theo công thức (9.43). Trong các biểu thức tính  $M'_{ik}$  và  $M''_{ik}$  lại có các giá trị mômen chưa xác định và có quan hệ tương hỗ với nhau, nên có thể vận dụng phương pháp lập đúng dần như sau:

Khi tính  $M'_{ik}$  theo công thức (9.28) thì các giá trị  $M'_{ki}$  và  $M''_{ik}$  chưa biết, nhưng nếu gán cho chúng các giá trị gần đúng bất kỳ thì có thể tìm được giá trị gần đúng của  $M'_{ik}$  rồi lại dùng kết quả đó để xét nút kế tiếp và được giá trị dần dần đúng hơn của mômen do xoay tại các nút.

Khi tính  $M''_{ik}$  theo công thức (9.43) ta cũng dựa vào các trị số gần đúng của  $M'_{ik}$  và  $M'_{ki}$  và cũng tìm được giá trị gần đúng của  $M''_{ik}$  rồi lại dùng kết quả đó để xét các tầng và nút kế tiếp sẽ được giá trị dần dần đúng hơn của  $M''_{ik}$ .

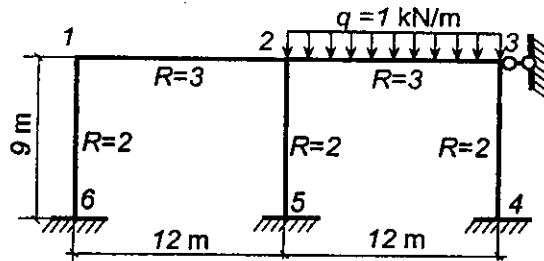
Bằng cách tính liên tiếp từ nút này sang nút khác, từ tầng này sang tầng

khác theo một thứ tự bất kỳ ta sẽ đạt được kết quả tiệm cận dần tới kết quả chính xác. Cơ sở của cách giải này được xây dựng theo cách giải lặp của Zeidel.

Như đã biết, khi tính các đại lượng cần tìm theo công thức (9.28) và (9.43) thì các đại lượng trong vế phải thường là chưa biết nên thường được chọn theo kết quả tính của chu trình trước hoặc có thể gán cho chúng các giá trị gần đúng bất kỳ khác. Những đại lượng cần gán này không được tích lũy để tham gia vào kết quả cuối cùng như trong phương pháp H. Cross nên không ảnh hưởng đến kết quả cuối cùng. Do đó, nếu trong quá trình tính toán có mắc sai sót thì cũng như khi ta gán cho chúng các giá trị gần đúng bất kỳ khác mà không ảnh hưởng đến kết quả cuối cùng. Tất nhiên, khi đó quá trình tính toán có thể bị kéo dài hơn hoặc cũng có thể rút ngắn hơn.

Dưới đây là một số ví dụ để làm sáng tỏ nội dung và thứ tự thực hiện của phương pháp G. Kani.

**Ví dụ 9.3.** Vẽ biểu đồ mômen uốn trong khung có nút không chuyển vị thẳng, cho biết các độ cứng đơn vị quy ước  $R=EI/l$  như trên hình 9.15.



Hình 9.15

Ta sẽ giải bài toán trên sơ đồ hệ (hình 9.16) và tiến hành theo thứ tự như sau:

1. *Xác định mômen nút cứng* do tải trọng gây ra trên hệ khi xem các nút là ngàm. Trong trường hợp này tải trọng chỉ tác dụng trên thanh 2-3 nên theo các số liệu trong bảng 6.1 và theo quy ước về dấu của G. Kani ta có:

$$\bar{M}_{2-3} = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{1 \cdot 12^2}{12} = -12 \text{ kNm}; \quad \bar{M}_{3-2} = +\frac{ql^2}{12} = +12 \text{ kNm};$$

Trên sơ đồ khung, ghi những giá trị này tại đầu các thanh tương ứng. Nếu  $ik$  là thanh ngang thì ghi  $\bar{M}_{ik}$  và  $\bar{M}_{ki}$  tại đầu  $i$  và đầu  $k$  ở phía trên thanh. Nếu  $ik$  là thanh đứng, ghi những giá trị này ngang sát nút hoặc ngàm rồi dùng đường kẻ ngang đứt nét để tách biệt với các mômen  $M'_{ik}$  sẽ ghi tiếp sau (hình 9.16).

Mômen nút cứng tại các nút:

- Tại nút 2:  $\bar{M}_2 = \bar{M}_{21} + \bar{M}_{23} + \bar{M}_{25} = 0 - 12 + 0 = -12 \text{ kNm}$ .
- Tại nút 3:  $\bar{M}_3 = +12 \text{ kNm}$ .

Trên sơ đồ khung ghi những đại lượng này vào vòng tròn trong, tại các nút tương ứng (hình 9.16).

2. Xác định hệ số xoay  $\mu_{ik}$  theo công thức (9.29)

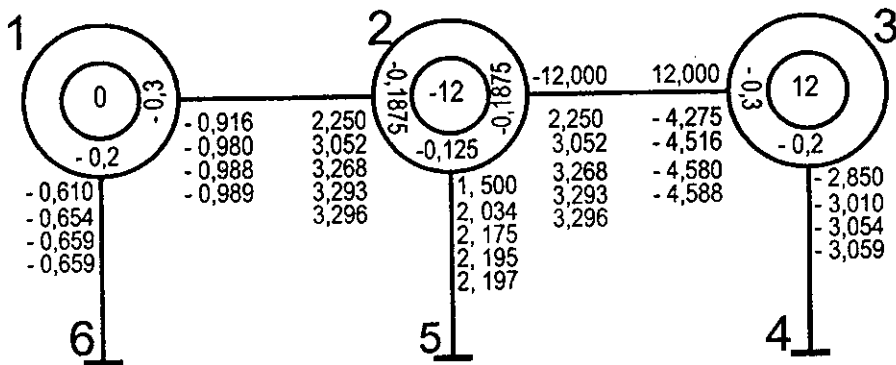
- Tại nút 1:  $\mu_{12} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{R_{12}}{R_{12} + R_{16}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2+3} = -0,3$ ;  
 $\mu_{16} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{R_{16}}{R_{12} + R_{16}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2+3} = -0,2$ .

Kiểm tra theo điều kiện (9.30):  $\mu_{12} + \mu_{16} = -0,3 - 0,2 = -0,5$  (đúng).

Thực hiện tương tự với các nút khác, ta được:

- Tại nút 2:  $\mu_{21} = \mu_{23} = -0,1875$ ;  $\mu_{25} = -0,125$ .
- Tại nút 3:  $\mu_{32} = -0,3$ ;  $\mu_{34} = -0,2$ .

Trên sơ đồ khung ghi những đại lượng này vào vòng tròn ngoài, tại các đầu thanh tương ứng (hình 9.16).



Hình 9.16

3. Tính các mômen do xoay  $M'_{ik}$  theo công thức (9.28), áp dụng cho trường hợp hệ có nút không chuyển vị thẳng:

$$M'_{ik} = \mu_{ik} (\bar{M}_i + \sum_{(i)} M'_{ki}).$$

Tính đúng đắn trị số  $M'_{ik}$  bằng cách sử dụng lặp đi lặp lại nhiều lần công thức trên khi xét từ nút này chuyển sang nút khác theo một thứ tự

tùy ý. Để chóng đạt tới kết quả, có thể bắt đầu từ nút có mômen nút cứng lớn về trị tuyệt đối, chẳng hạn, xét nút 2 trước. Lúc đó ta tự cho trước mômen do xoay tại các đầu thanh đối diện với nút 2 những giá trị gần đúng bất kỳ. Nếu dự đoán trước càng sát thực tế thì tốc độ tính toán càng nhanh, song thường chưa biết rõ nên có thể giả thiết bằng không, nghĩa là cho

$$\sum_{(2)} M'_{ki} = M'_{12} + M'_{32} + M'_{52} = 0 + 0 + 0 = 0,$$

trong đó  $M'_{52} = 0$  vì đầu 5 là ngàm cứng không xoay, còn  $M'_{12}$  và  $M'_{32}$  bằng không là giả thiết. Do đó, ta có:

$$M'_{21} = \mu_{21} \bar{M}_2 = (-0,1875)(-12) = +2,250 \text{ kNm};$$

$$M'_{23} = \mu_{23} \bar{M}_2 = (-0,1875)(-12) = +2,250 \text{ kNm};$$

$$M'_{25} = \mu_{25} \bar{M}_2 = (-0,125)(-12) = +1,500 \text{ kNm}.$$

Ghi các số liệu này trên sơ đồ khung tại các đầu thanh tương ứng quanh nút 2.

Sau đó, chuyển sang xét các nút khác theo một trình tự tùy ý, chẳng hạn theo thứ tự 3-2-1-3...

• Tại nút 3, lúc này  $M'_{23}$  đã có giá trị tìm được ở bước trên nên:

$$\begin{aligned} M'_{32} &= \mu_{32}(\bar{M}_3 + M'_{23} + M'_{43}) = -0,3(12 + 2,250 + 0) = -0,3(14,250) = \\ &= -4,275 \text{ kNm}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M'_{34} &= \mu_{34}(\bar{M}_3 + M'_{23} + M'_{43}) = -0,2(12 + 2,250 + 0) = -0,2(14,250) = \\ &= -2,850 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

Ghi các số liệu này tại các đầu thanh tương ứng quanh nút 3.

• Tại nút 2:

$$M'_{21} = (-0,1875)(-12 + 0 + 0 - 4,275) = +3,052 \text{ kNm};$$

$$M'_{23} = (-0,1875)(-12 + 0 + 0 - 4,275) = +3,052 \text{ kNm};$$

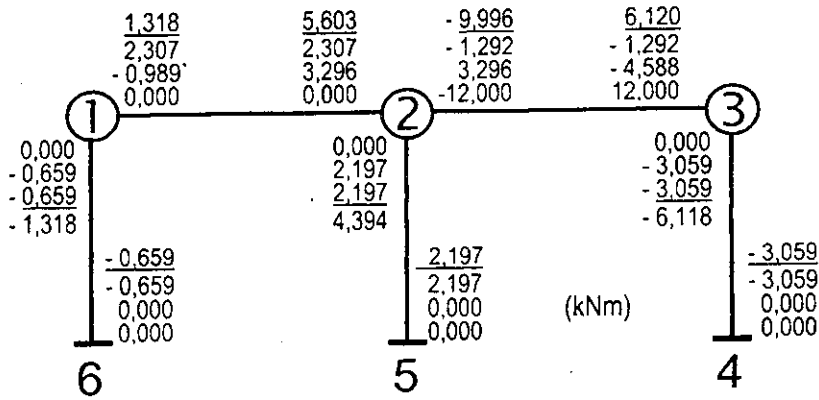
$$M'_{25} = (-0,125)(-12 + 0 + 0 - 4,275) = +2,034 \text{ kNm}.$$

• Tại nút 1:

$$M'_{12} = (-0,3)(0 + 0 + 3,052) = -0,916 \text{ kNm};$$

$$M'_{16} = (-0,2)(0 + 0 + 3,052) = -0,610 \text{ kNm}.$$

Cứ tiếp tục như vậy theo thứ tự xét các nút 3-2-1-3... ta sẽ được kết quả ghi trên sơ đồ khung (hình 9.16). Các giá trị  $M'_{ik}$  tại các đầu thanh sẽ tiệm cận đến giá trị chính xác. Quá trình tính toán kết thúc khi các giá trị  $M'_{ik}$  trong lần tính cuối cùng trùng hoặc xấp xỉ bằng các giá trị  $M'_{ik}$  tương ứng trong lần tính trước trong phạm vi sai số cho phép.



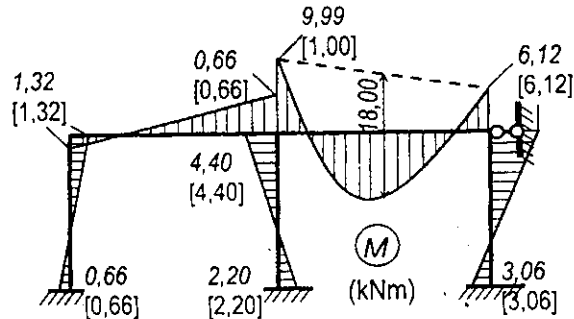
Hình 9.17

4. Tính mômen uốn tại các đầu thanh. Áp dụng công thức (9.25), ta có:

$$M_{ik} = \bar{M}_{ik} + 2M'_{ik} + M'_{ki} = \bar{M}_{ik} + M'_{ik} + (M'_{ik} + M'_{ki}).$$

Quá trình thực hiện được trình bày trên sơ đồ khung (hình 9.17).

Tại mỗi đầu thanh trên sơ đồ khung ta thực hiện phép tổng của ba giá trị lần lượt là:  $\bar{M}_{ik}$ ,  $M'_{ik}$  và  $(M'_{ik} + M'_{ki})$ .



Hình 9.18

5. Vẽ biểu đồ mômen uốn theo kết quả tính toán mômen uốn ở các đầu thanh. Kết quả như trên hình 9.18. Các số liệu ghi trong dấu móc vuông là kết quả tính chính xác được lấy tròn tới hai số thập phân.

Ví dụ 9.4. Vẽ biểu đồ mômen uốn trong khung có nút chuyển vị thẳng, cho biết các độ cứng đơn vị quy ước  $R = EI/l$  như trên hình 9.19.

1. Xác định mômen nút cứng

$$\bar{M}_{45} = \bar{M}_{54} = \bar{M}_{56} = \bar{M}_{65} = 0;$$

$$\bar{M}_{34} = -\bar{M}_{43} = -\frac{1.6^2}{12} = -3,000 \text{ kNm};$$

$$\bar{M}_{25} = -\bar{M}_{52} = -\frac{2.6}{8} = -1,500 \text{ kNm};$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{23} = -\bar{M}_{32} &= -\frac{0,25.6^2}{12} = \\ &= -0,750 \text{ kNm}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{12} &= -\frac{0,25.6^2}{12} - \frac{0,6.4.2^2}{6^2} = \\ &= -1,017 \text{ kNm}; \end{aligned}$$

$$\bar{M}_{21} = \frac{0,25.6^2}{12} + \frac{0,6.2.4^2}{6^2} = 1,283 \text{ kNm}.$$

• Tại nút 2:  $\bar{M}_2 = 1,283 - 1,500 - 0,750 = -0,967 \text{ kNm};$

• Tại nút 3:  $\bar{M}_3 = 0,750 - 3,000 = -2,250 \text{ kNm};$

• Tại nút 4:  $\bar{M}_4 = 3,000 \text{ kNm};$

• Tại nút 5:  $\bar{M}_5 = 1,500 \text{ kNm}.$

Trên sơ đồ khung (hình 9.20) ta ghi các giá trị  $\bar{M}_{ik}$  và  $\bar{M}_i$  vào những vị trí như đã chỉ dẫn ở ví dụ trên.

2. Xác định các hệ số xoay theo công thức (9.29):

Ví dụ tại nút 2:  $\mu_{21} = \mu_{25} = \mu_{23} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,5}{0,5+0,5+0,5} = -0,167.$

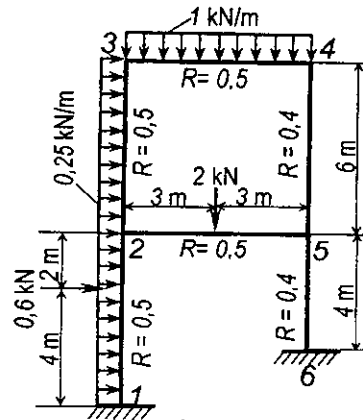
Kết quả tính các hệ số  $\mu$  được ghi trong vòng tròn ngoài trên sơ đồ khung (hình 9.20).

3. Xác định hệ số chuyển vị thẳng theo công thức (9.44):

• Tầng II: các thanh đứng có chiều dài bằng nhau và có hai đầu đều là nút nên  $h_{II} = 6 \text{ m}; \alpha_{ik} = 1; m_{ik} = 1.$  Do đó:

$$v_{23} = v_{32} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{R_{32}}{R_{32} + R_{45}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{0,5}{0,5 + 0,4} = -0,833;$$

$$v_{54} = v_{45} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{R_{45}}{R_{32} + R_{45}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{0,4}{0,5 + 0,4} = -0,667.$$



Hình 9.19



Kiểm tra theo (9.45):  $v_{23} + v_{45} = -0,833 - 0,667 = -1,5$  (đúng).

- **Tầng I:** các thanh đứng có điều kiện liên kết như nhau (hai đầu là nút hoặc ngàm) nhưng chiều dài khác nhau. Nếu chọn  $h_I = h_{I2} = 6$  m, ta có:

$$m_{I2} = m_{56} = 1; \quad \alpha_{I2} = 1; \quad \alpha_{56} = h_I / h_{56} = 6 / 4 = 1,5.$$

$$v_{I2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha_{I2} R_{I2}}{m_{I2} \alpha_{I2}^2 R_{I2} + m_{56} \alpha_{56}^2 R_{56}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1,0,5}{1,1^2 \cdot 0,5 + 1,1,5^2 \cdot 0,4} = -0,535$$

$$v_{56} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha_{56} R_{56}}{m_{I2} \alpha_{I2}^2 R_{I2} + m_{56} \alpha_{56}^2 R_{56}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1,5 \cdot 0,4}{1,1^2 \cdot 0,5 + 1,1,5^2 \cdot 0,4} = -0,644.$$

Kiểm tra theo điều kiện (9.45):

$$m_{I2} \alpha_{I2} v_{I2} + m_{56} \alpha_{56} v_{56} = 1,1 \cdot (-0,535) + 1,1,5 \cdot (0,644) = -1,5; \text{ (đúng).}$$

Trên sơ đồ khung ta ghi các giá trị  $v_{ik}$  vừa tìm được vào các ô chữ nhật đặt ở khoảng giữa thanh đứng  $ik$  tương ứng (hình 9.20).

#### 4. Xác định các mômen tầng theo (9.39) và (9.35)

- **Tầng II:** Dùng mặt cắt ngang sát dưới các nút 3, 4; theo (9.35) ta có:

$$Q_{II} = \sum P_{ng} - (Q_{32}^d + Q_{45}^d) + \left[ \frac{I}{h_{32}} (\bar{M}_{23} + \bar{M}_{32}) + \frac{I}{h_{45}} (\bar{M}_{45} + \bar{M}_{54}) \right] =$$

$$= 0 - \left[ -\frac{0,25 \cdot 6}{2} + 0 \right] + \left[ \frac{I}{6} (-0,75 + 0,75) + \frac{I}{6} (0 + 0) \right] = 0,75 \text{ kN.}$$

$$\text{Theo (9.39): } M_{II} = Q_{II} h_{II} / 3 = 0,75 \cdot 6 / 3 = 1,5 \text{ kNm.}$$

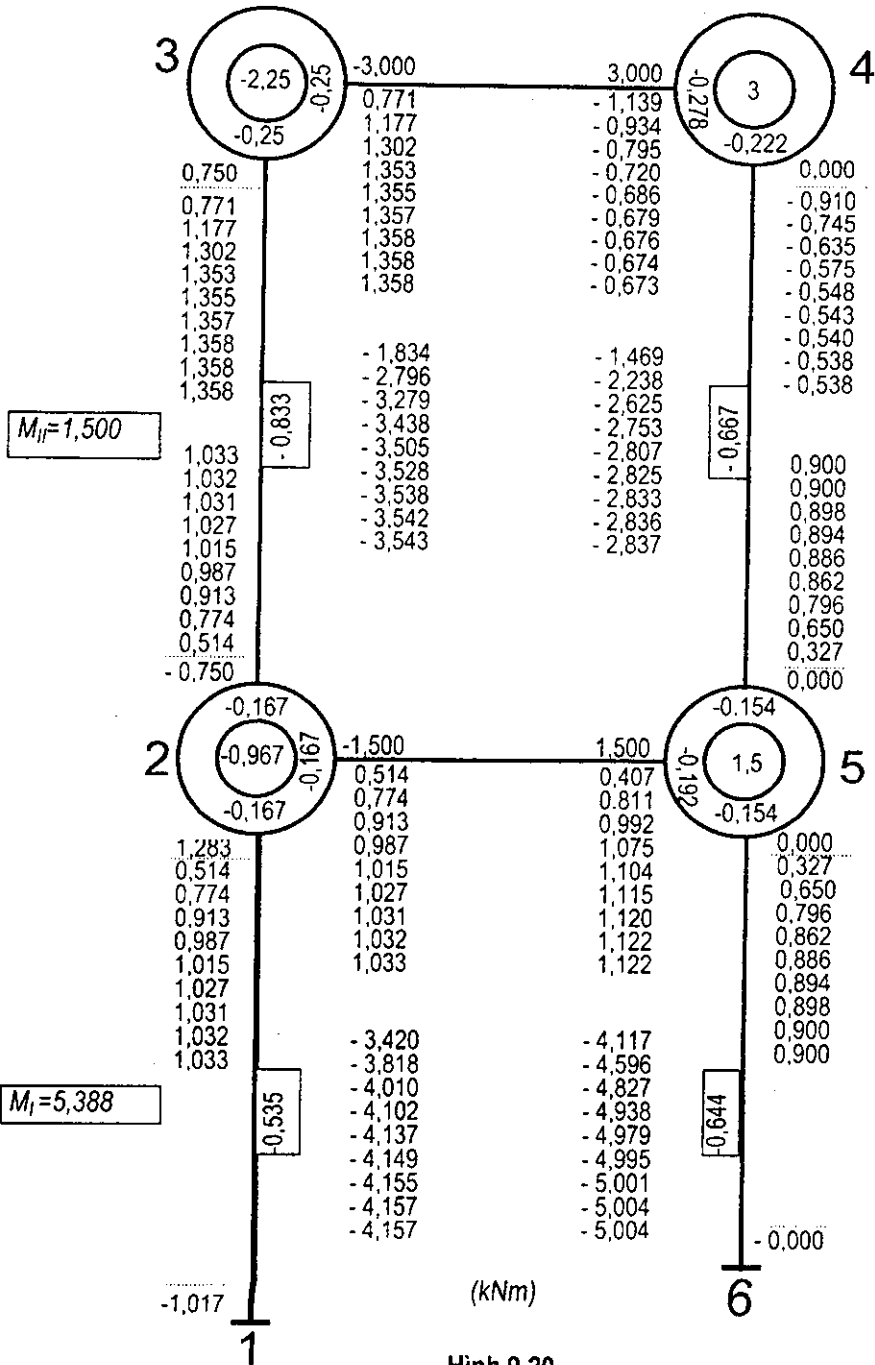
- **Tầng I:** Dùng mặt cắt ngang sát dưới các nút 2, 5; theo (9.35), ta có:

$$Q_I = \sum P_{ng} - (Q_{21}^d + Q_{56}^d) + \left[ \frac{I}{h_{21}} (\bar{M}_{21} + \bar{M}_{12}) + \frac{I}{h_{56}} (\bar{M}_{56} + \bar{M}_{65}) \right] =$$

$$= 0,25 \cdot 6 - \left[ -\frac{0,25 \cdot 6}{2} - \frac{0,6 \cdot 4}{6} + 0 \right] + \left[ \frac{I}{6} (1,283 - 1,017) + \frac{I}{4} (0 + 0) \right] = 2,694 \text{ kN.}$$

$$\text{Theo (9.39): } M_I = Q_I h_I / 3 = 2,694 \cdot 6 / 3 = 5,388 \text{ kNm.}$$

Trên sơ đồ khung ta ghi các giá trị mômen tầng vào ô chữ nhật bên cạnh tầng tương ứng (hình 9.20).



Hình 9.20

5. Tính mômen do xoay  $M'_{ik}$  và mômen do chuyển vị thẳng  $M''_{ik}$  theo các công thức (9.28) và (9.43):

$$M'_{ik} = \mu_{ik} [\bar{M}_i + \sum_{(i)} (M'_{ki} + M''_{ik})]; \quad M''_{ik} = \nu_{ik} [M_r + \sum_{(r)} \alpha_{ik} (M'_{ik} + M'_{ki})].$$

Thứ tự tính  $M'_{ik}$  và  $M''_{ik}$  trước hay sau, từ nút này sang nút khác, từ tầng này sang tầng khác là tùy ý. Cần áp dụng xen kẽ hai công thức trên và thực hiện nhiều chu trình cho tới khi kết quả tính hội tụ với mức độ chính xác cần thiết. Nên căn cứ vào mức độ ảnh hưởng của tải trọng đối với mômen do xoay và mômen do chuyển vị thẳng lớn hay nhỏ để tính  $M'_{ik}$  trước hay  $M''_{ik}$  trước.

Trước khi bước vào các chu trình tính toán ta có thể chuẩn bị bằng cách phân phối nút có  $\bar{M}_i$  lớn và tầng có  $M_r$  lớn trước. Trong ví dụ này, có thể tính  $M'_{ik}$  tại nút 4 và  $M''_{ik}$  tại tầng I.

Trong lần tính đầu tiên, các trị số chưa biết có thể giả thiết bằng không. Ví dụ, tính  $M'_{ik}$  tại nút 4:

$$M'_{43} = \mu_{43} (\bar{M}_4 + M'_{34} + M'_{54} + M''_{45}) = -0,278(+3+0+0+0) = -0,834 \text{ kNm};$$

$$M'_{45} = \mu_{45} (\bar{M}_4 + M'_{34} + M'_{54} + M''_{45}) = -0,222(+3+0+0+0) = -0,666 \text{ kNm}.$$

Tính  $M''_{ik}$  tại tầng I:

$$M''_{12} = \nu_{12} [M_I + \alpha_{12} (M'_{12} + M'_{21}) + \alpha_{56} (M'_{56} + M'_{65})] = -0,535 \cdot 5,388 = -2,883 \text{ kNm};$$

$$M''_{56} = \nu_{56} [M_I + \alpha_{12} (M'_{12} + M'_{21}) + \alpha_{56} (M'_{56} + M'_{65})] = -0,644 \cdot 5,388 = -3,470 \text{ kNm}.$$

Sau bước chuẩn bị, ta bắt đầu thực hiện chu trình thứ nhất theo thứ tự tùy ý, chẳng hạn theo thứ tự các nút 3, 2, 5, 4, tầng II, tầng I.

• **Tại nút 3:**  $M'_{34} = M'_{32} = -0,25[-2,25 - 0,834] = 0,771 \text{ kNm}.$

• **Tại nút 2:**  $M'_{23} = M'_{25} = M'_{21} = -0,167[-0,967 + 0,771 - 2,883] = 0,514 \text{ kNm}.$

• **Tại nút 5:**  $M'_{52} = -0,192[1,5 + 0,514 - 0,666 - 3,470] = -0,192[-2,122] = 0,407 \text{ kNm};$

$$M'_{54} = M'_{56} = -0,154[-2,122] = 0,327 \text{ kNm}.$$

• **Tại nút 4:**  $M'_{43} = -0,278[3 + 0,771 + 0,327] = -0,278[4,098] = -1,139 \text{ kNm};$

$$M'_{45} = -0,222[4,098] = -0,910 \text{ kNm.}$$

- Tầng II:  $M''_{32} = -0,833[1,50+0,771+0,514+0,327-0,910] =$   
 $= -0,833[2,202] = -1,834 \text{ kNm;}$

$$M''_{45} = -0,667[2,202] = -1,469 \text{ kNm.}$$

- Tầng I:  $M''_{21} = -0,535[5,388+0,514+1,5.0,327] =$   
 $= -0,535[6,3925] = -3,420 \text{ kNm;}$

$$M''_{56} = -0,644[6,3925] = -4,117 \text{ kNm.}$$

Chu trình thứ hai cũng thực hiện theo thứ tự đã nêu ở chu trình thứ nhất.

- Tại nút 3:  $M'_{34} = M'_{32} = -0,25[-2,25-1,139+0,514-1,834] =$   
 $= 1,177 \text{ kNm.}$

- Tại nút 2:  $M'_{23} = M'_{25} = M'_{21} = -0,167[-0,967+1,177+$   
 $+0,407-1,834-3,420] = 0,774 \text{ kNm.}$

- Tại nút 5:  $M'_{52} = -0,192[1,5+0,774-0,91-4,117-1,469] =$   
 $= -0,192[-4,222] = 0,811 \text{ kNm;}$

$$M'_{54} = M'_{56} = -0,154[-4,222] = 0,650 \text{ kNm.}$$

- Tại nút 4:  $M'_{43} = -0,278[3+1,177+0,650-1,469] =$   
 $= -0,278[3,358] = -0,934 \text{ kNm;}$

$$M'_{45} = -0,222[3,358] = -0,754 \text{ kNm.}$$

- Tầng II:  $M''_{32} = -0,833[1,50+1,177+0,774+0,650-0,745] =$   
 $= -0,833[3,356] = -2,796 \text{ kNm;}$

$$M''_{45} = -0,667[3,356] = -2,238 \text{ kNm.}$$

- Tầng I:  $M''_{21} = -0,535[5,388+0,774+1,5.0,650] =$   
 $= -0,535[7,137] = -3,818 \text{ kNm;}$

$$M''_{56} = -0,644[7,137] = -4,596 \text{ kNm.}$$

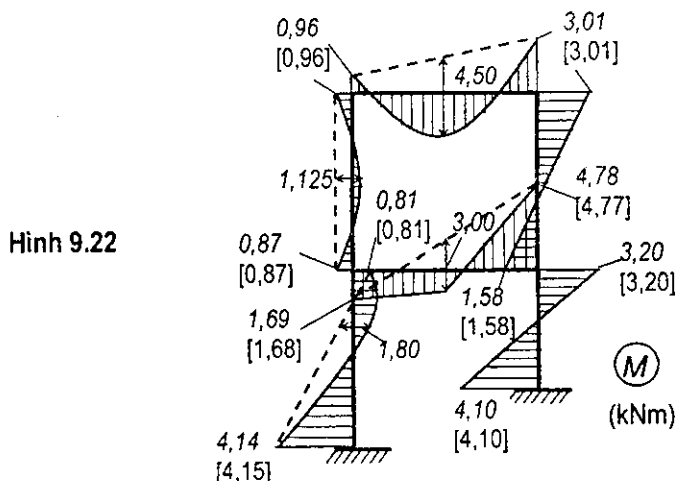
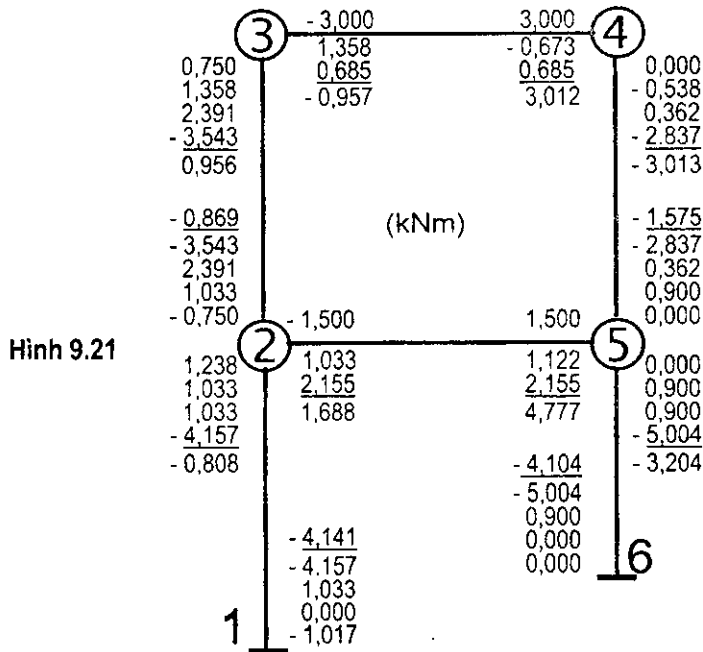
Cũng thực hiện tương tự như trên đối với các chu trình tiếp sau. Kết quả tính (bắt đầu từ chu trình 1) ghi trên sơ đồ hệ (hình 9.20). Đến chu trình thứ 9, kết quả đã hội tụ nên có thể kết thúc quá trình phân phối.

#### 6. Tính mômen uốn ở đầu các thanh theo công thức (9.25)

$$M_{ik} = \bar{M}_{ik} + 2M'_{ik} + M'_{ki} + M''_{ik} = \bar{M}_{ik} + M'_{ik} + (M'_{ik} + M'_{ki}) + M''_{ik}.$$

Quá trình tính toán được thực hiện trên sơ đồ hệ (hình 9.21).

7. *Vẽ biểu đồ mômen uốn trong hệ theo kết quả tính mômen uốn ở đầu các thanh (hình 9.21). Kết quả như trên hình 9.22. Các số liệu ghi trong dấu móc vuông là kết quả tính chính xác được lấy tròn tới hai số thập phân.*



## CÂU HỎI ÔN TẬP

- 9.1. Trình bày nội dung bài toán cơ bản: "Sự phân phối mômen xung quanh một nút".
- 9.2. Trình bày nội dung phương pháp H. Cross để tính hệ có nút không chuyển vị thẳng.
- 9.3. Thông qua ví dụ đơn giản, trình bày thứ tự thực hiện khi áp dụng phương pháp H. Cross để tính hệ có nút không chuyển vị thẳng.
- 9.4. Trình bày nội dung phương pháp H. Cross để tính hệ có nút chuyển vị thẳng.
- 9.5. Trình bày cách thiết lập công thức xác định mômen uốn tại tiết diện ở đầu các thanh theo phương pháp G. Kani.
- 9.6. Trình bày cách thiết lập công thức xác định mômen do xoay trong phương pháp G. Kani.
- 9.7. Trình bày cách thiết lập công thức xác định mômen do chuyển vị thẳng trong phương pháp G. Kani.
- 9.8. Nêu thứ tự thực hiện khi áp dụng phương pháp G. Kani để tính khung có nút chuyển vị thẳng.

# 10 Phương pháp tính gần đúng

## 10.1. Ý nghĩa của các phương pháp tính gần đúng

Trong các chương 5 và 6 đã giới thiệu hai phương pháp cơ bản: phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Đó là các phương pháp được xem là “chính xác”. Tất nhiên từ chính xác dùng ở đây chỉ có tính chất quy ước vì bản thân các phương pháp này cũng đã dựa trên cơ sở các giả thiết gần đúng thường được chấp nhận.

Trong chương 9 cũng đã giới thiệu phương pháp H. Cross và G. Kani là các phương pháp lặp đúng dần. Nếu quá trình tính lặp càng kéo dài thì kết quả tính theo các phương pháp này càng tiệm cận đến kết quả chính xác.

Tuy nhiên, khi tính hệ siêu tĩnh hoặc siêu động theo các phương pháp nêu trên ta thường gặp những khó khăn sau:

- \* Phải ấn định trước kích thước của tiết diện trong các cấu kiện (biết diện tích  $A$ , mômen quán tính chính trung tâm  $I$ ) vì bài toán cần giải theo các phương pháp nói trên là bài toán kiểm tra xem các kích thước đã ấn định có thoả mãn các điều kiện bền, điều kiện cứng hay không.

Tất nhiên ta cũng có thể dựa trên kinh nghiệm để ấn định trước các đại lượng  $A$  và  $I$  của tiết diện trong các thanh. Nhưng nếu chọn không phù hợp thì sau mỗi lần tính ta lại phải điều chỉnh các đại lượng  $A$  và  $I$  và tính toán lại cho tới khi thoả mãn các điều kiện bền, điều kiện cứng. Như vậy, cần phải giải hệ siêu tĩnh nhiều lần, tốn nhiều công sức.

- \* Tính hệ siêu tĩnh hoặc siêu động theo các phương pháp chính xác khá phức tạp và tốn nhiều công sức, đặc biệt là khi tính các hệ có số ẩn lớn.

Để khắc phục những khó khăn nêu trên, trên thực tế còn yêu cầu phải xây dựng các phương pháp tính gần đúng.

Phương pháp gần đúng cũng được xây dựng trên cơ sở các giả thiết đã được chấp nhận trong các phương pháp chính xác, song còn bổ sung những giả thiết khác nhằm làm đơn giản việc tính toán. Giả thiết bổ sung có thể thô sơ hơn song cần phù hợp với từng thể loại kết cấu.

Tất nhiên, với mỗi thể loại kết cấu ta có thể đề ra nhiều phương pháp tính gần đúng dựa trên những giả thiết bổ sung khác nhau, nhưng chỉ có những phương pháp nào cho sai số nhỏ, tính toán nhanh và đơn giản mới là những phương pháp có ý nghĩa.

Có thể chia các phương pháp gần đúng thành hai loại:

- ✦ Phương pháp tính gần đúng dựa trên những giả thiết bổ sung thô sơ nhằm phục vụ cho việc ấn định trước kích thước của tiết diện các thanh. Ta gọi các phương pháp này là *phương pháp tính sơ bộ*.
- ✦ Phương pháp tính gần đúng dựa trên những giả thiết bổ sung tương đối phù hợp với điều kiện làm việc của công trình, nhằm làm đơn giản việc tính toán. Các phương pháp này thường cũng yêu cầu phải ấn định trước kích thước của tiết diện các thanh nên được gọi là *phương pháp tính kiểm tra gần đúng*.

Về nguyên tắc, khi thiết kế một kết cấu siêu tĩnh hoặc siêu động ta thường phải trải qua ba giai đoạn như sau:

1. *Xác định sơ bộ kích thước tiết diện các thanh*: Vận dụng các phương pháp tính gần đúng sơ bộ (không phụ thuộc kích thước tiết diện các thanh) để xác định nội lực; căn cứ vào nội lực tìm được, ấn định kích thước của tiết diện các thanh. Ngoài ra, còn có thể dựa vào kinh nghiệm để ấn định.
2. *Kiểm tra gần đúng*: Sau khi ấn định kích thước của tiết diện các thanh theo giai đoạn 1; vận dụng các phương pháp tính kiểm tra gần đúng để xác định nội lực; căn cứ vào nội lực tìm được, xác định lại kích thước của tiết diện các thanh. Nếu các kích thước này chưa phù hợp với kích thước ấn định ban đầu thì cần lập lại các phép tính với các kích thước mới cho đến khi kích thước giả thiết phù hợp với kích thước yêu cầu. Giai đoạn này nhằm chính xác hoá kích thước tiết diện để chuẩn bị cho việc tính toán trong giai đoạn thứ 3.
3. *Kiểm tra chính xác*: Ấn định kích thước của tiết diện các thanh theo kết quả tính ở giai đoạn 2; vận dụng các phương pháp tính chính xác để xác định nội lực; căn cứ vào nội lực tìm được, kiểm tra lại các kích thước của tiết diện các thanh. Nếu chưa phù hợp thì cần lập lại các phép tính với các kích thước mới tương tự như đã thực hiện ở giai đoạn thứ 2.

Cần chú ý là cách thực hiện theo ba giai đoạn nêu ở trên cũng khá phức tạp cho nên trong thực tế thiết kế cần linh hoạt áp dụng. Tùy theo tầm quan trọng của công trình thiết kế, có thể kết thúc tính toán sau khi đã thực hiện tới một giai đoạn nào đó.

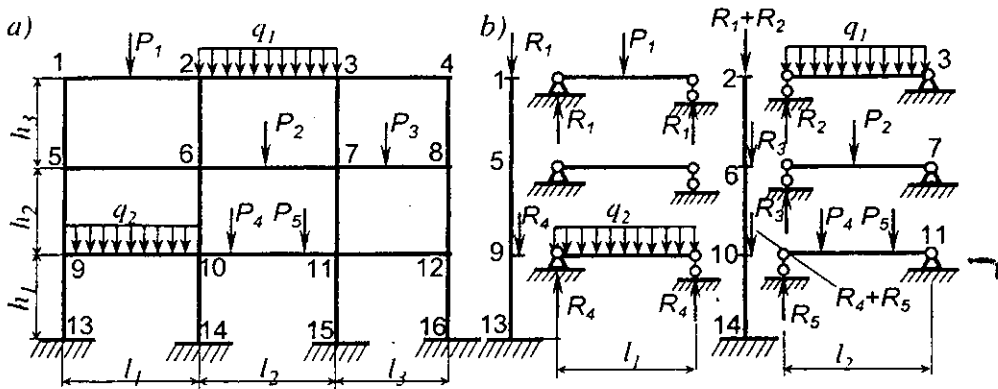


Hiện có nhiều phương pháp tính gần đúng phù hợp hợp từng thể loại kết cấu khác nhau. Khó có thể xây dựng được một phương pháp gần đúng duy nhất áp dụng chung cho mọi trường hợp.

Trong phạm vi giáo trình này chỉ giới thiệu một vài phương pháp tính gần đúng có hiệu quả, thường được chấp nhận để áp dụng cho những dạng kết cấu phổ biến. Trên cơ sở đó ta có thể tự đề ra các giả thiết để tìm cách tính gần đúng cho các trường hợp khác.

## 10.2. Cách xác định sơ bộ kích thước tiết diện thanh trong khung phẳng siêu tĩnh hoặc siêu động

Giả sử xét khung phẳng nhiều tầng nhiều nhịp chịu tải trọng như trên hình 10.1a. Yêu cầu xác định sơ bộ kích thước tiết diện các thanh trong khung.



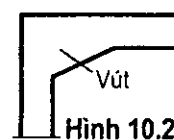
Hình 10.1

Dựa trên kinh nghiệm thiết kế ta có thể chọn tiết diện của các thanh theo các nội lực được xác định như sau:

1. Đối với các thanh ngang: chọn tiết diện cho mỗi thanh ngang theo mômen uốn:

$$\rightarrow M = (0,6 \div 0,7) M_{max}^d \text{ khi thanh có vút nhỏ;}$$

$$\rightarrow M = (0,4 \div 0,7) M_{max}^d \text{ khi thanh có vút lớn,}$$



Hình 10.2

trong đó:  $M_{max}^d$  là mômen uốn lớn nhất trong dầm

đơn giản có cùng nhịp và cùng chịu tải trọng như trên thanh đang xét.

Chẳng hạn, với thanh 9-10, ta có:  $M_{max}^d = q_2 l^2 / 8$ .

Vút là bộ phận gia cường ở các đầu thanh ngang (hình 10.2). Vút được xem là lớn hay nhỏ tùy theo mức độ của tỷ số giữa mômen quán tính tại

tiết diện lớn nhất với mômen quán tính tại tiết diện nhỏ nhất.

2. *Đối với các thanh đứng*: chọn tiết diện theo lực dọc cho từng thanh. Lực dọc trong mỗi thanh đứng được xác định theo các áp lực truyền từ các thanh ngang ở phía trên với giả thiết coi mỗi thanh ngang là một dầm đơn giản. Trên hình 10.1b trình bày cách tính lực dọc trong các cấu kiện của hai thanh đứng bên trái.

Ví dụ: Trong thanh 1-5 và 5-9:  $N = R_1$ ;

Trong thanh 9-13:  $N = R_1 + R_4$ ;

Trong thanh 2-6:  $N = R_1 + R_2$ .

Thực ra, ngoài lực dọc, các thanh đứng còn chịu mômen uốn cho nên nếu chọn tiết diện theo quy cách như trên thì không đủ bảo đảm. Qua kinh nghiệm thiết kế ta thấy cần phải tăng giá trị lực dọc tìm được theo cách trên lên (20 ÷ 50)%. Đối với các thanh đứng ở bên trong khung chỉ cần tăng ít còn với các thanh đứng ở ngoài biên thì cần tăng nhiều hơn.

Mức độ tăng giảm các nội lực tính toán còn tùy thuộc cách bố trí tải trọng trên khung. Trong thực hành cần linh hoạt chọn lựa.

### 10.3. Cách tính kiểm tra gân đúng các khung phẳng nhiều tầng nhiều nhịp chịu tải trọng thẳng đứng

Phương pháp tính kiểm tra gân đúng các khung phẳng nhiều tầng nhiều nhịp chịu tải trọng tác dụng thẳng đứng được xây dựng trên cơ sở các giả thiết sau:

- \* *Tải trọng tác dụng trên các thanh ngang của tầng này ảnh hưởng rất ít đến nội lực trong các thanh ngang của tầng khác.*
- \* *Ảnh hưởng của chuyển vị ngang tại các nút đến nội lực trong khung rất nhỏ. Do đó, có thể xem các nút trong khung không có chuyển vị thẳng.*

Nếu thừa nhận các giả thiết trên ta có thể tính khung theo thứ tự như sau:

1. Chia khung nhiều tầng nhiều nhịp (hình 10.3a) thành nhiều khung đơn giản một tầng nhiều nhịp (hình 10.3b). Mỗi khung đơn giản bao gồm các thanh ngang của một tầng nào đó và các thanh đứng nối với tầng đang xét ở phía trên và phía dưới.

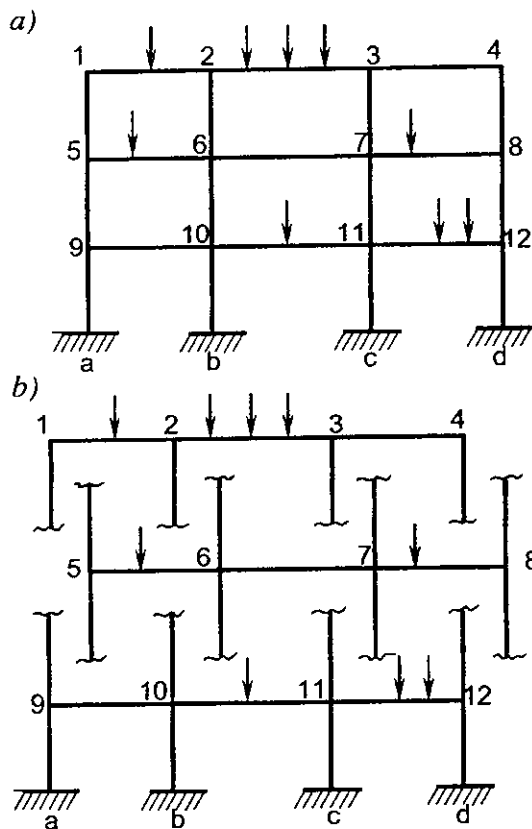
Tại các đầu nối của các thanh đứng nối với các tầng khác cần đặt liên kết ngàm đàn hồi, ký hiệu bằng đường sóng như trên hình 10.3b. Sở dĩ cần đặt ngàm đàn hồi là vì các nút của khung có thể xoay được nên không phải là ngàm, nhưng cũng không thể xoay được tự do như khớp. Liên kết ngàm đàn hồi giữ vai trò trung gian giữa ngàm và khớp.

2. Lần lượt tính từng khung đơn giản chịu tải trọng tác dụng trên mỗi tầng tương ứng theo phương pháp chuyển vị hoặc theo phương pháp phân phối mômen. Trong một số tài liệu [11] có cung cấp kết quả tính nội lực cho những loại khung đơn giản nêu trên, tương ứng với các dạng tải trọng khác nhau. Khi tính những khung này cần chú ý:

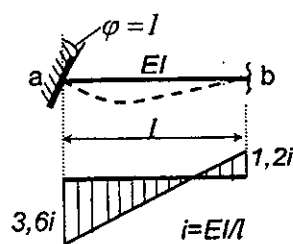
❖ Coi các nút của khung không có chuyển vị thẳng. Do đó, nếu tính khung theo phương pháp chuyển vị thì khi lập hệ cơ bản ta không thêm các liên kết lực, còn nếu tính theo phương pháp H. Cross thì không cần thực hiện giai đoạn thứ hai.

❖ Khi nút xoay, biểu đồ mômen uốn trong thanh đơn giản có một đầu là nút, một đầu là ngàm đàn hồi có dạng như trên hình 10.4. Vì ngàm đàn hồi giữ vai trò trung gian giữa ngàm và khớp nên mômen uốn tại đầu thanh bị xoay sẽ có giá trị trong khoảng từ  $3i$  (tương ứng với đầu đối diện là khớp) đến  $4i$  (tương ứng với đầu đối diện là ngàm), thường lấy bằng  $3,6i$ . Mômen uốn tại đầu thanh có ngàm đàn hồi có giá trị trong khoảng từ  $0$  (tương ứng với trường hợp khớp) đến  $2i$  (tương ứng với trường hợp ngàm); thường lấy bằng  $1,2i$  (xem hình 10.4).

Nếu tính theo phương pháp phân phối mômen thì trên cơ sở biểu đồ mẫu đã chọn (hình 10.4) ta có thể suy ra độ cứng đơn vị quy ước của thanh có ngàm đàn hồi như sau:



Hình 10.3



Hình 10.4

$$R = \frac{M_a}{4} = \frac{3,6i}{4} = 0,9i = 0,9 \frac{EI}{l}$$

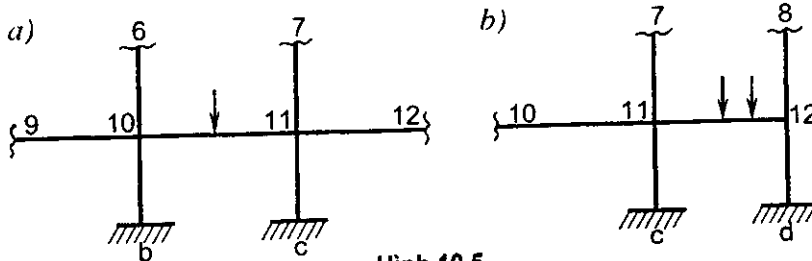
Hệ số truyền của thanh có ngàm đàn hồi bằng:  $\frac{M_b}{M_a} = \frac{1,2i}{3,6i} = \frac{1}{3}$ .

3. Sau khi vẽ biểu đồ mômen uốn cho từng khung đơn giản, ta vẽ biểu đồ mômen uốn cho toàn khung đã cho như sau:

- ❖ Biểu đồ mômen uốn trên các thanh ngang của khung đã cho là biểu đồ mômen uốn trên các thanh ngang tương ứng của khung đơn giản.
- ❖ Biểu đồ mômen uốn trên các thanh đứng của khung đã cho là tổng biểu đồ mômen uốn trong hai thanh đứng cùng tên thuộc hai khung đơn giản bởi vì mỗi thanh đứng đều có mặt trong hai khung đơn giản khác nhau.

Cần chú ý là với cách vẽ này, các lực tác dụng tìm được tại các nút sẽ không cân bằng.

**Chú thích:** Ta cũng có thể tiếp tục làm đơn giản thêm nữa nếu chấp nhận giả thiết: tải trọng tác dụng trên một nhịp nào đó chỉ gây ra nội lực đáng kể trong hai nhịp kế bên, còn đối với các nhịp xa hơn nữa thì gây ra nội lực nhỏ, có thể bỏ qua. Trên cơ sở đó ta có thể chia những khung đơn giản nói trên thành nhiều khung nhỏ hơn theo chiều ngang. Trên hình 10.5 trình bày cách chia nhỏ khung thuộc tầng dưới. Tất nhiên, sau khi tính từng khung nhỏ tách biệt, để có được kết quả trong khung đơn giản ta cần cộng kết quả trong các khung nhỏ tương ứng.



Hình 10.5

**Ví dụ 10.1.** Tính khung cho trên hình 10.6. Độ cứng đơn vị của các thanh được ghi trong các khuyên tròn

Chia khung đã cho thành hai khung đơn giản như trên hình 10.7a và 10.8a.

1. **Tính khung thuộc tầng trên** (hình 10.7a). Vì các nút được xem là không có chuyển vị ngang nên nếu tính theo phương pháp chuyển vị thì chỉ có ba chuyển vị xoay chưa biết  $Z_1, Z_2, Z_3$  tại các nút. Các biểu đồ mômen uốn đơn vị  $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$  và biểu đồ mômen uốn do tải trọng  $M_P^0$  gây ra

trong hệ cơ bản tìm được như trên hình 10.7b, c, d, e.

Sau khi xác định các hệ số và số hạng tự do ta được hệ phương trình chính tắc:

$$15,6Z_1 + 6,0Z_2 - 5,0 = 0;$$

$$6,0Z_1 + 29,2Z_2 + 5,0Z_3 - 2,2 = 0;$$

$$5,0Z_2 + 13,6Z_3 + 7,2 = 0.$$

Nghiệm của hệ phương trình:

$$Z_1 = 0,276 \text{ rad};$$

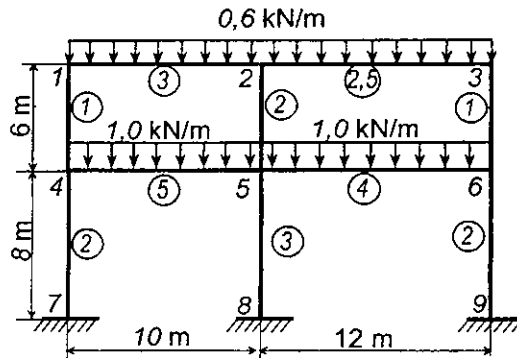
$$Z_2 = 0,117 \text{ rad};$$

$$Z_3 = -0,572 \text{ rad}.$$

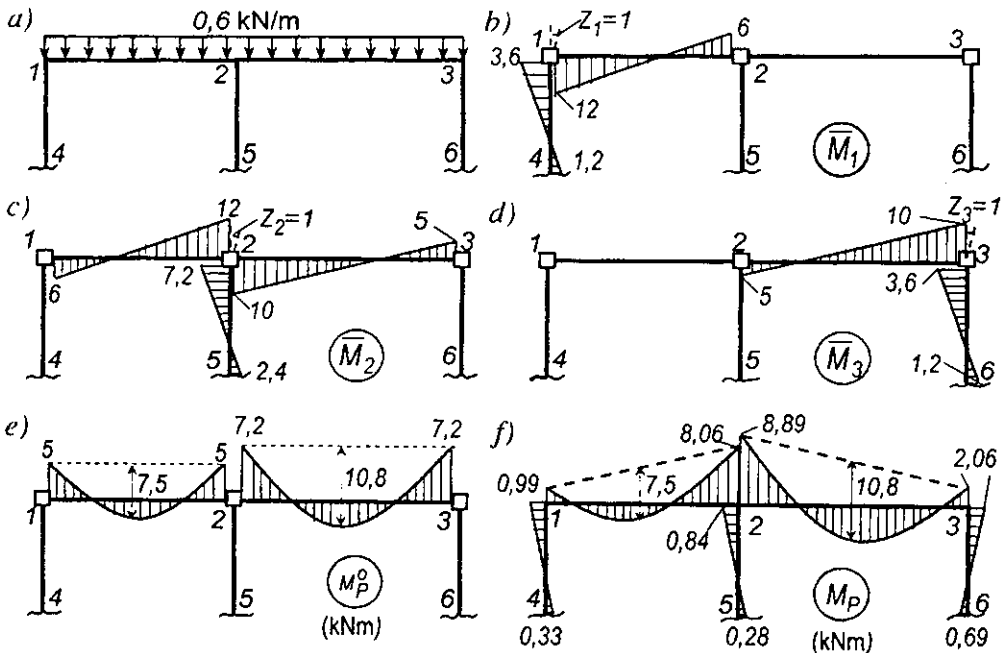
Từ công thức:

$$(M_p) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + (\bar{M}_3)Z_3 + (M_p^o)$$

ta tìm được biểu đồ mômen uốn cho khung đơn giản thuộc tầng trên (hình 10.7f).

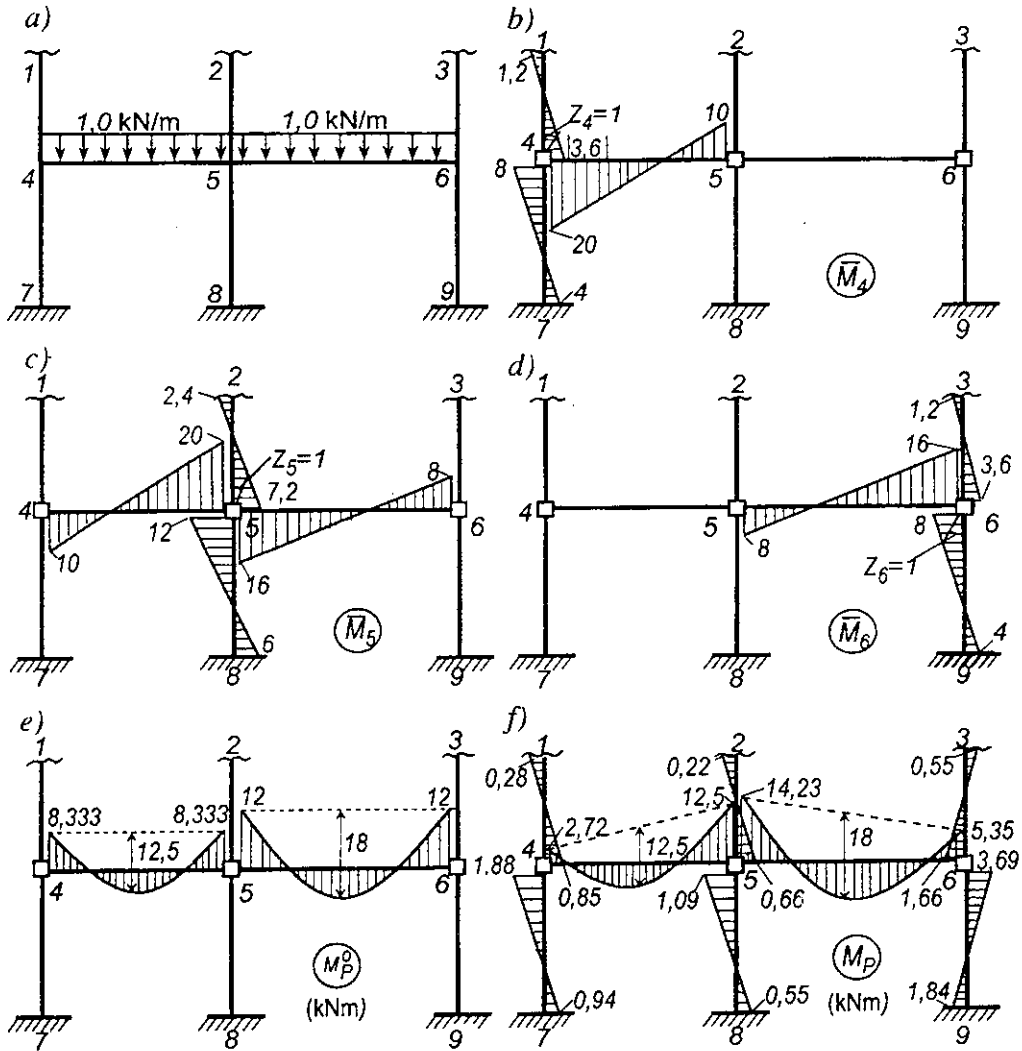


Hình 10.6



Hình 10.7

2. Tính khung thuộc tầng dưới (hình 10.8a). Nếu tính theo phương pháp chuyển vị thì chỉ có ba chuyển vị xoay chưa biết  $Z_4, Z_5, Z_6$ , tại các nút.



Hình 10.8

Các biểu đồ mômen uốn đơn vị  $\bar{M}_4, \bar{M}_5, \bar{M}_6$  và biểu đồ mômen uốn do tải trọng  $M_P^0$  gây ra trong hệ cơ bản tìm được như trên hình 10.8b, c, d, e.

Sau khi xác định các hệ số và số hạng tự do ta được hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{aligned}
 31,6Z_4 + 10,0Z_5 & - 8,333 = 0; \\
 10,0Z_4 + 55,2Z_5 + 8,0Z_6 & - 3,667 = 0; \\
 8,0Z_5 + 27,6Z_6 + 12 & = 0.
 \end{aligned}$$

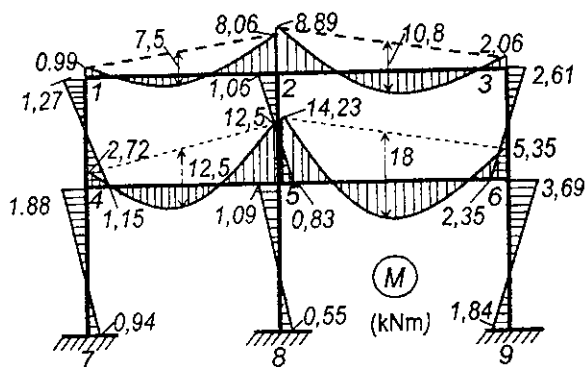
Nghiệm của hệ phương trình:

$$Z_4 = 0,235 \text{ rad}; \quad Z_5 = 0,091 \text{ rad}; \quad Z_6 = -0,461 \text{ rad}.$$

Từ công thức:  $(M_p) = (\bar{M}_4)Z_4 + (\bar{M}_5)Z_5 + (\bar{M}_6)Z_6 + (M_p^0)$

ta tìm được biểu đồ mômen uốn cho khung đơn giản thuộc tầng dưới (hình 10.8f).

3. Vẽ biểu đồ mômen uốn trong khung cho ban đầu: Cộng hai biểu đồ mômen uốn trong hai khung đơn giản (hình 10.7f và 10.8f) sẽ được biểu đồ mômen uốn cần tìm như trên hình 10.9.



Hình 10.9

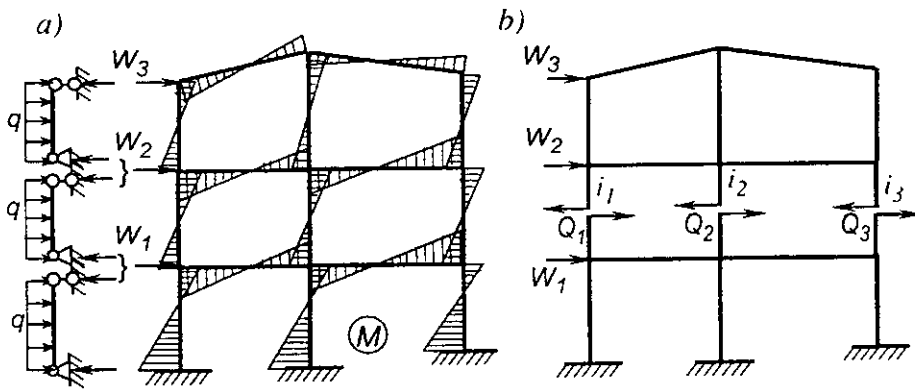
#### 10.4. Cách tính kiểm tra gần đúng các khung phẳng nhiều tầng nhiều nhịp chịu tải trọng ngang

Trong thực tế, tải trọng ngang thường phân bố theo chiều cao của khung. Để tính khung theo phương pháp này, trước tiên ta cần đưa tải trọng phân bố về tải trọng tập trung đặt ở các nút theo nguyên tắc dầm đơn giản hoặc dầm liên tục. Trên hình 10.10a trình bày cách đưa tải trọng phân bố đều về tải trọng tập trung đặt ở các nút theo nguyên tắc dầm đơn giản. Mỗi lực tập trung đặt ở các nút có giá trị bằng phản lực của những dầm đơn giản có nhịp bằng chiều cao của mỗi tầng do tải trọng phân bố gây ra.

Kết quả nghiên cứu các dạng biểu đồ mômen uốn tương ứng với trường hợp này theo phương pháp chính xác chứng tỏ: biểu đồ mômen uốn luôn có dạng như trên hình 10.10a. Điểm không của biểu đồ mômen uốn trên các thanh đứng thuộc các tầng phía trên có vị trí ở gần giữa mỗi thanh đứng; còn điểm không của biểu đồ mômen uốn trên các thanh đứng thuộc tầng dưới cùng có vị trí ở gần điểm nằm cách ngàm một khoảng bằng  $2/3$  chiều cao của thanh.

Bởi vậy, ta giả thiết: *điểm không của biểu đồ mômen uốn trên các thanh*

đứng có vị trí ở chính giữa chiều cao của mỗi thanh đứng thuộc các tầng trên và ở cách ngàm một khoảng bằng 2/3 chiều cao của các thanh đứng thuộc tầng dưới cùng.



Hình 10.10

Nếu thực hiện mặt cắt qua các điểm không như đã nêu trên, thuộc một tầng nào đó (hình 10.10b) thì tại những điểm này chỉ có lực cắt  $Q_k$  và lực dọc  $N_k$ . Lập phương trình cân bằng hình chiếu lên phương ngang, ta có:

$$\sum Q_k = \sum W, \quad (10.1)$$

trong đó:

$\sum W$  – tổng các lực ngang ở phía trên tầng đang xét (phía trên mặt cắt);

$Q_k$  – lực cắt trong thanh thứ  $k$  thuộc tầng đang xét. .

Để xác định lực cắt  $Q_k$  trong thanh thứ  $k$  thuộc tầng đang xét, ta giả thiết: lực cắt được phân phối tỷ lệ thuận với độ cứng đơn vị và tỷ lệ nghịch với bình phương chiều cao của thanh đứng, tức là phụ thuộc tỷ số  $(i_k/h_k^2)$  của mỗi thanh. Ta có:

$$Q_k = \frac{(i_k/h_k^2)}{\sum_m (i_m/h_m^2)} \sum W, \quad (10.2)$$

trong đó:

$i_k$  và  $i_m$  – độ cứng đơn vị của thanh đứng thứ  $k$  và thứ  $m$  thuộc tầng đang xét;

$h_k$  và  $h_m$  – chiều cao của thanh đứng thứ  $k$  và thứ  $m$  thuộc tầng đang xét;

$\sum (i_m/h_m^2)$  – tổng các tỷ số  $(i_m/h_m^2)$  của tất cả các thanh đứng thuộc tầng đang xét.



Trường hợp đặc biệt, khi chiều cao của các thanh đứng trong mỗi tầng bằng nhau, công thức xác định lực cắt  $Q_k$  trong thanh thứ  $k$  thuộc tầng đang xét có dạng:

$$Q_k = \frac{i_k}{\sum_m i_k} \sum W, \quad (10.3)$$

Sau khi biết lực cắt trong các thanh đứng của tất cả các tầng, ta dễ dàng tìm được mômen uốn trong các thanh đứng như sau:

❖ Đối với các thanh đứng thuộc các tầng trên: mômen uốn ở hai đầu thanh được xác định theo công thức:

$$M_k = \frac{1}{2} Q_k h_k; \quad (10.4)$$

❖ Đối với các thanh đứng thuộc tầng dưới cùng:

- mômen uốn ở đầu trên:  $M_{k,t} = \frac{1}{3} Q_k h_k; \quad (10.5)$

- mômen uốn ở đầu dưới:  $M_{k,d} = \frac{2}{3} Q_k h_k. \quad (10.6)$

Sau khi tìm được biểu đồ mômen uốn trong các thanh đứng, ta tìm được biểu đồ mômen uốn trong các thanh ngang theo nguyên tắc cân bằng nút.

❖ Đối với các nút biên chỉ có một thanh ngang (hình 10.11a): mômen uốn ở đầu thanh ngang có giá trị bằng tổng mômen uốn ở hai đầu thanh đứng quy tụ vào nút và được xác định theo công thức:

$$M = M_t + M_d. \quad (10.7)$$

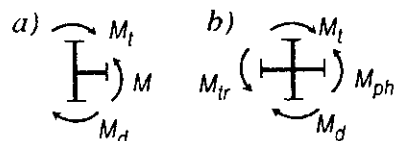
❖ Đối với các nút bên trong khung có hai thanh ngang quy tụ (hình 10.11b), ta có điều kiện cân bằng:

$$M_{tr} + M_{ph} = M_t + M_d.$$

Điều kiện này mới chỉ cho biết tổng giá trị của mômen uốn tại hai đầu thanh ngang ở bên trái và bên phải nút đang xét. Để xác định giá trị của  $M_{tr}$  và  $M_{ph}$  ta giả thiết: tổng giá trị

$M_{tr} + M_{ph}$  được phân phối vào các thanh ngang tỷ lệ thuận với độ cứng đơn vị của mỗi thanh ngang, tức là:

$$M_{tr} = \frac{i_{tr}}{i_{tr} + i_{ph}} (M_t + M_d); \quad (10.8)$$



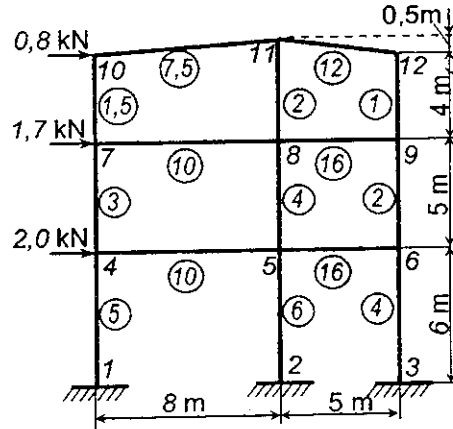
Hình 10.11

$$M_{ph} = \frac{i_{ph}}{i_{tr} + i_{ph}} (M_t + M_d). \quad (10.9)$$

Các ký hiệu trong các công thức trên đã được trình bày trên hình (10.11).

Cách tính trình bày ở trên cho kết quả tương đối tốt khi độ cứng của các thanh ngang lớn so với độ cứng của các thanh đứng và cho kết quả chính xác khi độ cứng của các thanh ngang bằng vô cùng.

**Ví dụ 10.2.** Vận dụng phương pháp kiểm tra gần đúng, vẽ biểu đồ mômen uốn trong khung ba tầng, hai nhịp chịu tải trọng ngang như trên hình 10.12. Độ cứng đơn vị của các thanh được ghi trong các khuyên tròn.



Hình 10.12

1. Xác định lực cắt trong các thanh đứng:

- Tầng thứ ba: các thanh đứng có chiều cao khác nhau nên cần áp dụng công thức (10.2), ta có:

$$Q_{7-10} = \frac{1,5/4^2}{1,5/4^2 + 2/4,5^2 + 1/4^2} \times 0,8 = \frac{0,094}{0,255} \times 0,8 = 0,29 \text{ kN};$$

$$Q_{8-11} = \frac{2/4,5^2}{0,255} \times 0,8 = 0,31 \text{ kN}; \quad Q_{9-12} = \frac{1/4^2}{0,255} \times 0,8 = 0,20 \text{ kN}.$$

- Tầng thứ hai: các thanh đứng có chiều cao như nhau nên có thể áp dụng công thức (10.3), ta có:

$$Q_{4-7} = \frac{3}{3+4+2} \times (0,8+1,7) = \frac{3}{9} \times 2,5 = 0,83 \text{ kN};$$

$$Q_{5-8} = \frac{4}{9} \times 2,5 = 1,11 \text{ kN}; \quad Q_{6-9} = \frac{2}{9} \times 2,5 = 0,560 \text{ kN}.$$

- Tầng thứ nhất: các thanh đứng có chiều cao như nhau, áp dụng công thức (10.3), ta có:

$$Q_{1-4} = \frac{5}{5+6+4} \times (0,8+1,7+2) = \frac{5}{15} \times 4,5 = 1,50 \text{ kN};$$

$$Q_{2.5} = \frac{6}{15} \times 4,5 = 1,80 \text{ kN}; \quad Q_{3.6} = \frac{4}{15} \times 4,5 = 1,20 \text{ kN}.$$

2. Xác định mômen uốn tại các đầu thanh đứng:

- Tầng thứ ba: áp dụng công thức (10.4), ta xác định được giá trị tuyệt đối của các mômen uốn như sau:

$$M_{7.10} = M_{10.7} = 0,29 \times \frac{4}{2} = 0,58 \text{ kNm};$$

$$M_{8.11} = M_{11.8} = 0,31 \times \frac{4,5}{2} = 0,70 \text{ kNm};$$

$$M_{9.12} = M_{12.9} = 0,20 \times \frac{4}{2} = 0,40 \text{ kNm}.$$

- Tầng thứ hai: áp dụng công thức (10.4), ta tìm được giá trị tuyệt đối của các mômen uốn như sau:

$$M_{4.7} = M_{7.4} = 0,83 \times \frac{5}{2} = 2,08 \text{ kNm};$$

$$M_{5.8} = M_{8.5} = 1,11 \times \frac{5}{2} = 2,78 \text{ kNm};$$

$$M_{6.9} = M_{9.6} = 0,56 \times \frac{5}{2} = 1,40 \text{ kNm}.$$

- Tầng thứ nhất: áp dụng công thức (10.4), ta tìm được giá trị tuyệt đối của các mômen uốn như sau:

Mômen uốn tại đầu trên:

$$M_{4.1} = 1,5 \times \frac{6}{3} = 3,00 \text{ kNm};$$

$$M_{5.2} = 1,8 \times \frac{6}{3} = 3,60 \text{ kNm};$$

$$M_{6.8} = 1,2 \times \frac{6}{3} = 2,40 \text{ kNm};$$

Mômen uốn tại đầu dưới:

$$M_{1.4} = 1,5 \times \frac{2.6}{3} = 6,00 \text{ kNm};$$

$$M_{5.2} = 1,8 \times \frac{2.6}{3} = 7,20 \text{ kNm};$$

$$M_{6.8} = 1,2 \times \frac{2.6}{3} = 4,80 \text{ kNm}.$$

Vẽ biểu đồ mômen uốn trong các thanh đứng (hình 10.13a)

2. Xác định mômen uốn tại các đầu thanh ngang theo điều kiện cân bằng nút:

- ❖ Đối với các nút biên chỉ có một thanh ngang: mômen uốn ở đầu thanh ngang có giá trị bằng tổng mômen uốn ở hai đầu thanh đứng quy tụ vào nút và được xác định theo công thức (10.7). Kết quả tính ghi trên hình 10.13a.

- ❖ Đối với các nút bên trong khung có hai thanh ngang quy tụ, ta sử dụng

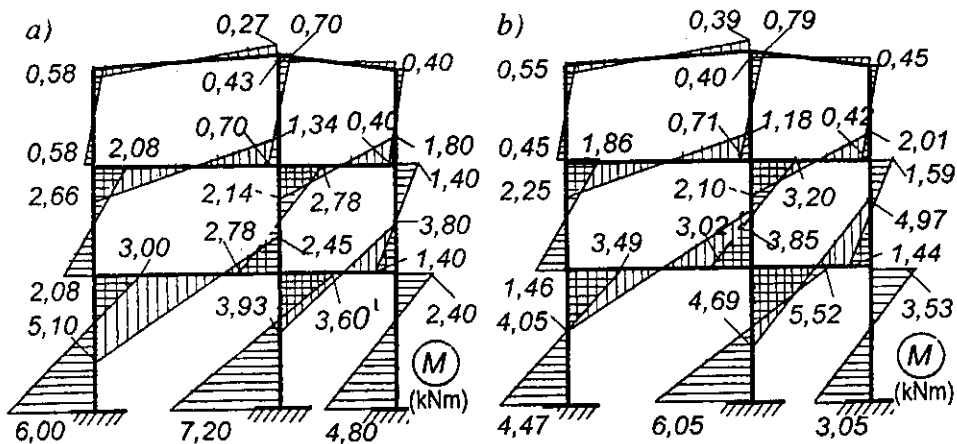
các công thức (10.8) và (10.9).

- Tại nút 11:  $M_{11-10} = \frac{7,5}{7,5+12} \cdot 0,70 = 0,27 \text{ kNm};$   
 $M_{11-12} = \frac{12}{7,5+12} \cdot 0,70 = 0,43 \text{ kNm}.$
- Tại nút 8:  $M_{8-7} = \frac{10}{10+16} (0,70+2,78) = 1,34 \text{ kNm};$   
 $M_{8-9} = \frac{16}{10+16} (0,70+2,78) = 2,14 \text{ kNm}.$
- Tại nút 5:  $M_{5-4} = \frac{10}{10+16} (2,78+3,60) = 2,45 \text{ kNm};$   
 $M_{5-6} = \frac{16}{10+16} (2,78+3,60) = 3,93 \text{ kNm}.$

Căn cứ vào các số liệu này ta vẽ được biểu đồ mômen uốn trong các thanh ngang.

Biểu đồ mômen uốn trên toàn khung như trên hình 10.13a.

Để thấy được mức độ chính xác của phương pháp, trên hình 10.13b cung cấp kết quả tính theo phương pháp chính xác.



Hình 10.13

## 10.5. Cách tính gần đúng các dàn siêu tĩnh

Trong mục này giới thiệu hai cách tính gần đúng các dàn phẳng siêu tĩnh, được dùng để xác định sơ bộ tiết diện các thanh trong dàn và cũng có thể coi như phép tính cuối cùng đối với các công trình không quan trọng lắm.

### A. Cách tính theo kiểu dầm

Giả sử cần tính nội lực trong các thanh của dàn siêu tĩnh trên hình 10.14a. Theo cách tính này, ta giả thiết dầm làm việc giống như một dầm đặc tương đương, các thanh thuộc biên trên và biên dưới của dàn chịu lực dọc để sao cho những lực này tạo thành ngẫu lực cân bằng với mômen uốn trong dầm tương đương, còn các thanh đứng và thanh xiên chịu lực dọc để sao cho cân bằng với lực cắt trong dầm tương đương.

Thứ tự thực hiện như sau:

1. Thay dàn bằng một dầm đặc tương đương (hình 10.14b). Vẽ biểu đồ mômen uốn và biểu đồ lực cắt (hình 10.14b, c) trong dầm do các tải trọng như tải trọng tác dụng trên dàn gây ra (nếu tính hệ chịu tải trọng đi động thì cần vẽ biểu đồ bao  $M, Q$ ).

2. Xác định lực dọc trong các thanh biên. Theo giả thiết nói trên, ta có:

$$h \times N_{\substack{\text{dưới} \\ \text{trên}}} = \pm M_k.$$

Do đó: 
$$N_{\substack{\text{dưới} \\ \text{trên}}} = \pm \frac{M_k}{h}, \quad (10.10)$$

trong đó:

$h$  – khoảng cách giữa các thanh biên đang khảo sát;

$M_k$  – mômen uốn trong dầm tương đương, tại tiết diện tương ứng với tâm mômen dùng để lập phương trình cân bằng xác định lực dọc trong thanh biên. Ví dụ, để tìm lực dọc trong thanh  $ab$  thì tâm mômen là điểm  $k$  trên hình 10.14a.

Trong công thức (10.10),  $M_k$  là giá trị đại số, lấy theo dấu trên biểu đồ mômen uốn. Dấu cộng (+) tương ứng với các thanh thuộc biên dưới; dấu (-) tương ứng với các thanh thuộc biên trên.

3. Xác định lực dọc trong các thanh đứng. Theo giả thiết nói trên, ta có:

$$N_{\text{đứng}} = -Q, \quad (10.11)$$

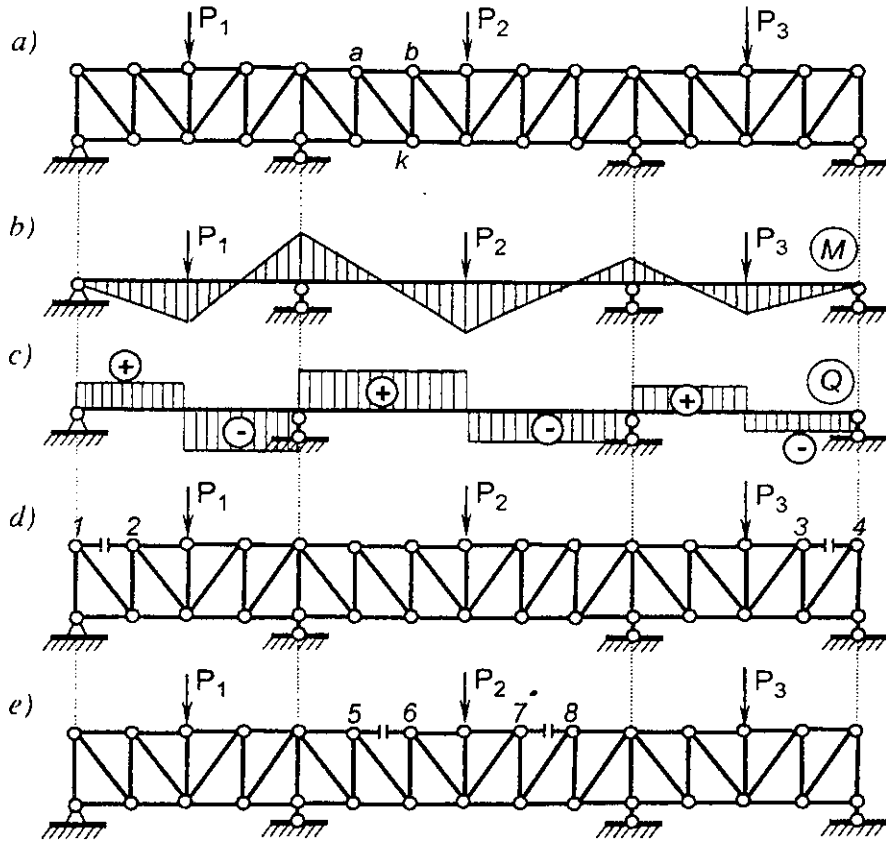
với  $Q$  là lực cắt trong dầm tương đương, tại tiết diện tương ứng với vị trí thanh đứng đang xét.

4. Xác định lực dọc trong các thanh xiên. Theo giả thiết nói trên, ta có điều kiện: hình chiếu của lực dọc trong thanh xiên lên phương vuông góc với trục dàn bằng lực cắt trong dầm tương đương.

$$N_{\text{xiên}} \cdot \cos \alpha = Q,$$

Do đó: 
$$N_{\text{xiên}} = \frac{Q}{\cos \alpha}, \quad (10.12)$$

với  $\alpha$  là góc hợp giữa thanh xiên và phương thẳng đứng.



Hình 10.14

Trường hợp có nhiều thanh xiên, ta giả thiết lực dọc trong các thanh xiên có trị số bằng nhau và có dấu để sao cho cân bằng với lực cắt trong dầm tương đương.

Dựa theo các nội lực tìm được như trên, ta xác định được kích thước của tiết diện các thanh.

### B. Cách tính theo kiểu dàn tĩnh định

Giả sử xét dàn có bậc siêu tĩnh bằng  $n$ . Theo cách tính này ta thay thế việc tính dàn siêu tĩnh bậc  $n$  bằng cách tính  $n$  dàn tĩnh định khác nhau. Mỗi dàn tĩnh định được suy ra từ dàn siêu tĩnh đã cho bằng cách cắt  $n$  thanh thừa mà ta phán đoán là có nội lực nhỏ (có thể dựa vào cách tính theo kiểu dầm để phán đoán). Xác định lực dọc trong tất cả các thanh của mỗi dàn tĩnh định chịu tải trọng như tải trọng tác dụng trên dàn siêu tĩnh. Với mỗi thanh ta lấy giá trị trung bình cộng của các nội lực tìm được từ  $n$

dàn tĩnh định khác nhau để chọn tiết diện.

Chẳng hạn, có thể thay việc tính dàn có bậc siêu tĩnh bằng 2 trên hình 10.14a bằng cách tính hai dàn tĩnh định trên các hình 10.14d và e. Trên dàn tĩnh định 10.14d, ta cắt hai thanh 1-2 và 3-4 vì theo công thức (10.10) và biểu đồ mômen uốn  $M$ , ta thấy lực dọc trong các thanh này nhỏ. Trên dàn tĩnh định 10.14e, ta cắt hai thanh 5-6 và 7-8 vì theo công thức (10.10) và biểu đồ mômen uốn  $M$ , ta thấy lực dọc trong các thanh này khá nhỏ. Nội lực dùng để xác định kích thước tiết diện trong một thanh nào đó là giá trị trung bình cộng của hai lực dọc xác định theo sơ đồ dàn tĩnh định 10.14d và 10.14e.

## 10.6. Cách tính gần đúng các vòm siêu tĩnh

Cách tính gần đúng giới thiệu ở đây chỉ áp dụng cho các vòm đối xứng chịu tải trọng thẳng đứng, dựa trên giả thiết: *lực xô trong vòm siêu tĩnh hai khớp hoặc không khớp bằng lực xô trong vòm ba khớp tương ứng* (hình 10.15a).

Như vậy, từ công thức xác định mômen uốn trong vòm ba khớp chịu tải trọng thẳng đứng:

$$M = M^d - H.y.$$

Tại khớp  $C$ , ta có:  $M_C = M_C^d - H.f = 0$ .

Suy ra: 
$$H = \frac{M_C^d}{f}, \quad (10.13)$$

trong đó:  $M_C^d$  – mômen uốn trong dầm đơn giản tương ứng, tại tiết diện ứng dưới đỉnh  $C$  của vòm;

$f$  – đường tên của trục vòm.

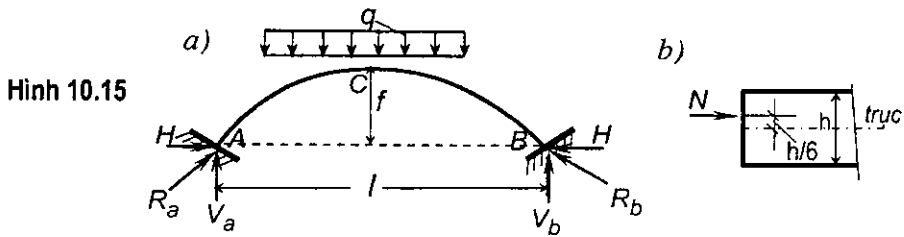
Các thành phần phản lực thẳng đứng  $V_a, V_b$  của vòm được giả thiết bằng phản lực thẳng đứng trong dầm đơn giản tương ứng. Phản lực toàn phần tại các gối có giá trị:

$$R_a = \sqrt{V_a^2 + H^2}; \quad R_b = \sqrt{V_b^2 + H^2}.$$

Sau khi biết phản lực ta có thể xác định lực dọc  $N$  tại tiết diện bất kỳ, đồng thời xác định kích thước tiết diện theo điều kiện tiết diện chịu nén lệch tâm với giả thiết là đường tác dụng của lực dọc luôn luôn đi qua những điểm nằm cách trục vòm một khoảng bằng một phần sáu chiều cao tiết diện (hình 10.15b).

Lúc này, khi tiết diện là hình chữ nhật có bề rộng là  $b$ , chiều cao là  $h$ , ứng suất được dùng để chọn tiết diện sẽ bằng:

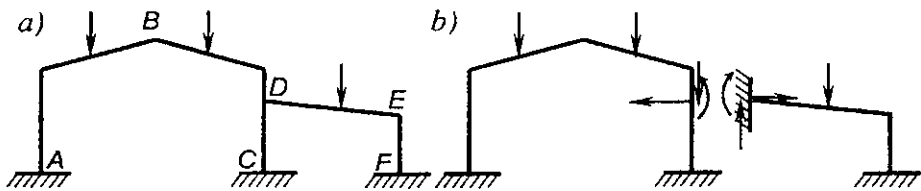
$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{N}{A} + \frac{Nh/6}{bh^2/6} = \frac{N}{A} + \frac{N}{bh} = \frac{N}{A} + \frac{N}{A} = \frac{2N}{A}$$



Cách tính này được dùng để thiết kế sơ bộ tiết diện của vòm siêu tĩnh trước khi áp dụng cách tính chính xác để kiểm tra. Đối với công trình không quan trọng lắm, có nhịp nhỏ chừng 5-6 m hoặc lớn hơn nữa, có thể không cần dùng cách tính chính xác để kiểm tra lại.

## 10.7. Một số cách đơn giản hoá sơ đồ tính

Trong mục này giới thiệu một số cách biến đổi sơ đồ tính của kết cấu thường được chấp nhận, nhằm làm đơn giản việc tính toán. Tất nhiên, khi đó kết quả tính toán chỉ là gần đúng nhưng sai số cũng nhỏ và có thể áp dụng được trong thực tế thiết kế.

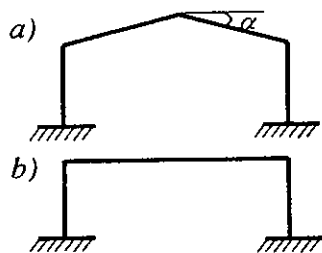


Hình 10.16

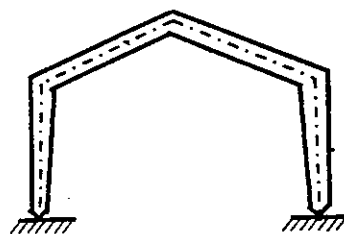
1. Nếu khung siêu tĩnh có nhiều bộ phận (hình 10.16a): bộ phận gồm các cấu kiện có độ cứng tương đối lớn, gọi là bộ phận chính (chẳng hạn, phần khung ABC trên hệ 10.16a); còn các bộ phận khác gồm các cấu kiện có độ cứng tương đối nhỏ, gọi là bộ phận phụ (chẳng hạn, phần khung DEF trên hệ 10.16a); thì ta có thể chia khung thành nhiều bộ phận riêng biệt để tính cho đơn giản. Trước tiên, tính các bộ phận phụ chịu tải trọng tác dụng trên bộ phận đó với giả thiết liên kết tại chỗ nối (nút D) giữa bộ phận phụ và bộ phận chính là ngàm. Sau đó, tính riêng biệt bộ phận chính chịu tải trọng tác dụng trên bộ phận đó và các áp lực truyền từ bộ phận phụ tới tại chỗ nối (hình 10.16b).



- Trong thực tế, các cấu kiện ngang của khung có thể là thanh gãy khúc hoặc thanh xiên (hình 10.17a). Nếu độ dốc  $tg\alpha$  của thanh gãy khúc hoặc thanh xiên không lớn quá 1:8 thì có thể thay bằng thanh nằm ngang (hình 10.17b).
- Trong các khung một nhịp có gối tựa là khớp, các thanh đứng thường có tiết diện thay đổi. Do đó, các thanh đứng thường được làm vát mặt trong hoặc mặt ngoài khung (hình 10.18). Như vậy, trục thanh đứng sẽ bị nghiêng, để tính cho đơn giản ta coi các trục này là thẳng đứng.



Hình 10.17



Hình 10.18

- Nếu các nhịp của dầm liên tục hoặc khung nhiều nhịp có chiều dài xấp xỉ bằng nhau thì có thể tăng chiều dài nhịp nhỏ, giảm chiều dài nhịp lớn sao cho các nhịp có chiều dài bằng nhau để có thể sử dụng các kết quả có sẵn trong các Sổ tay thiết kế [11]. Mức độ tăng giảm không được quá 5% chiều dài của nhịp tương ứng.
- Nếu trên các thanh ngang của khung hoặc trên các nhịp của dầm có chịu một số (lớn hơn 5) tải trọng tập trung có giá trị bằng nhau tác dụng tại các vị trí cách đều nhau thì có thể thay những tải trọng này bằng tải trọng phân bố đều.
- Nếu các tải trọng tập trung đặt trên các thanh ngang của khung có giá trị xấp xỉ bằng nhau thì có thể tăng hoặc giảm các tải trọng sao cho chúng bằng nhau. Mức độ tăng giảm không được quá 5% giá trị của mỗi lực. Nếu khoảng cách giữa các lực cũng xấp xỉ bằng nhau thì có thể chuyển dời vị trí các tải trọng trong phạm vi 5% chiều dài của nhịp.

## CÂU HỎI ÔN TẬP

- 10.1. Ý nghĩa của các phương pháp tính gần đúng trong thiết kế kết cấu công trình. Tồn tại những thể loại phương pháp tính gần đúng nào ?
- 10.2. Trình bày cách xác định sơ bộ kích thước tiết diện cho kết cấu khung siêu tĩnh.
- 10.3. Trình bày cách tính kiểm tra gần đúng các khung phẳng nhiều tầng nhiều nhịp chịu tải trọng thẳng đứng.
- 10.4. Trình bày cách tính kiểm tra gần đúng các khung phẳng nhiều tầng nhiều nhịp chịu tải trọng ngang.
- 10.5. Trình bày cách tính gần đúng các kết cấu dàn và vòm siêu tĩnh.
- 10.6. Nêu các biện pháp gần đúng thường được chấp nhận để đơn giản hoá sơ đồ tính kết cấu.

# 11 Phương pháp động học

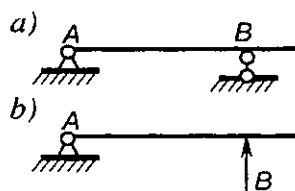
## 11.1. Khái niệm

Các phương pháp xác định phản lực và nội lực đã trình bày trong các chương trên là phương pháp tĩnh học vì được xây dựng trên cơ sở các điều kiện cân bằng tĩnh học. Trong chương này đề cập thêm một phương pháp có hiệu quả dùng để xác định phản lực và nội lực gọi là *phương pháp động học*.

*Phương pháp động học được xây dựng trên cơ sở các điều kiện cân bằng theo nguyên lý công khả dĩ.*

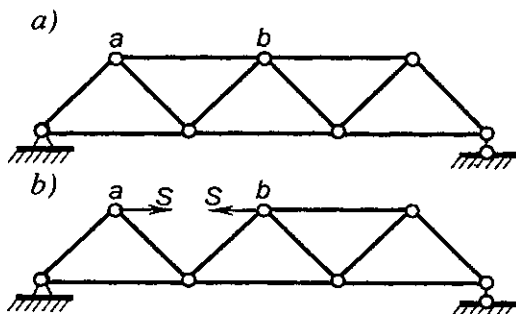
Nội dung phương pháp động học như sau:

1. Loại khỏi hệ liên kết cần xác định phản lực trong đó và thay thế tác dụng của liên kết bị loại bỏ bằng phản lực tương ứng cần tìm.

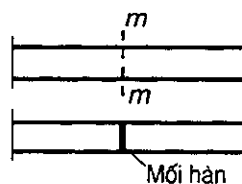


Hình 11.1

Để tìm phản lực tại gối B của hệ trên hình 11.1a, loại bỏ liên kết như trên hình 11.1b. Để tìm lực dọc trong thanh  $ab$  của dàn trên hình 11.2a ta có thể xem thanh  $ab$  như liên kết loại một và loại bỏ như trên hình 11.2b.



Hình 11.2



Hình 11.3

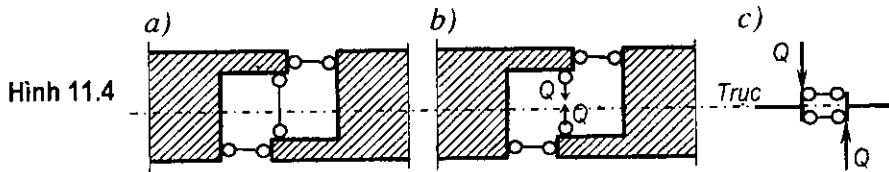
Để biết cách loại trừ liên kết khi cần xác định nội lực tại tiết diện  $m-m$  trong một thanh của hệ bất kỳ, ta có thể xem thanh này như hai miếng cứng nối với nhau bằng liên kết hàn (hình 11.3a và b) và xem các thành

phần nội lực như các thành phần phản lực trong liên kết hàn.

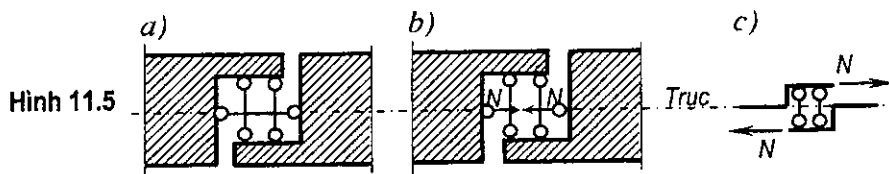
Về mặt động học cũng như tĩnh học, liên kết hàn tương đương với ba liên kết thanh hoặc một khớp và một thanh (hình 11.4a, 11.5a, 11.6a) bố trí hợp lý.

Do đó:

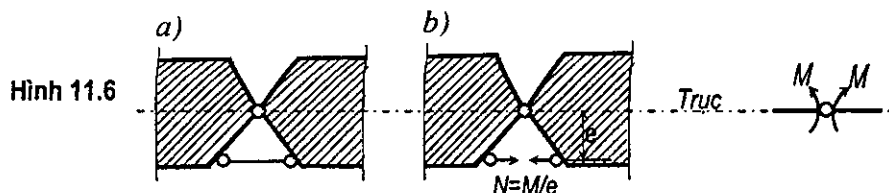
- ❖ Khi xác định *lực cắt tại tiết diện  $m-m$*  trong một thanh nào đó ta có thể xem như tại tiết diện  $m-m$  có ba liên kết thanh bố trí như trên hình 11.4a và *loại trừ liên kết hướng theo phương vuông góc với trục thanh* (hình 11.4b). Trên sơ đồ tính, ký hiệu liên kết còn lại tại tiết diện  $m-m$  sau khi đã loại trừ liên kết tương ứng với lực cắt như trên hình 11.4c.



- ❖ Khi xác định *lực dọc tại tiết diện  $m-m$* , ta xem như tại  $m-m$  có ba liên kết thanh như trên hình 11.5a và *loại trừ liên kết theo phương dọc trục thanh* như trên hình 11.5b. Trên sơ đồ tính, ký hiệu liên kết tại  $m-m$  sau khi đã loại trừ liên kết tương ứng với lực dọc như trên hình 11.5c.



- ❖ Khi xác định *mômen uốn tại tiết diện  $m-m$* , ta xem như tại  $m-m$  có một liên kết khớp tại trọng tâm tiết diện và một liên kết thanh  $a-b$  như trên hình 11.6a. Sau khi loại bỏ liên kết  $a-b$  ta thay vào đó hai lực  $N = M/e$  (hình 11.6b) với  $M$  là mômen uốn cần tìm, tiếp đó chuyển các lực  $N$  về khớp ta sẽ được mômen uốn có giá trị bằng  $M$ . Trên hình 11.6c là ký hiệu liên kết còn lại tại  $m-m$  sau khi đã loại trừ liên kết tương ứng với mômen uốn.



2. Gây cho hệ mới thu được một chuyển vị khả dĩ vô cùng bé. Chuyển vị khả dĩ là chuyển vị do nguyên nhân bất kỳ gây ra mà liên kết cho phép.

3. Thiết lập điều kiện cân bằng theo nguyên lý công khả dĩ:

*"Nếu một hệ biến dạng đàn hồi cô lập cân bằng dưới tác dụng của các lực thì tổng công khả dĩ của các ngoại lực trên những chuyển vị khả dĩ vô cùng bé tương ứng và công khả dĩ của các nội lực trên những biến dạng đàn hồi khả dĩ tương ứng phải bằng không".*

Trong biểu thức công khả dĩ có chứa đại lượng cần tìm, do đó ta có thể suy ra giá trị đại lượng này từ điều kiện cân bằng.

Có thể áp dụng nguyên lý công khả dĩ dưới những hình thức khác nhau nên cũng có các phương pháp động học tương ứng.

Trong các mục dưới đây sẽ lần lượt giới thiệu các phương pháp động học để tính kết cấu chịu tải trọng bất động, tải trọng di động và để nghiên cứu sự cấu tạo hình học của những hệ có đủ số liên kết.

## 11.2. Cách tính hệ thanh phẳng tĩnh định chịu tải trọng bất động

Trong các hệ tĩnh định, sau khi loại bỏ một liên kết hệ trở thành biến hình một lần và được gọi là *cơ cấu*. Khi gây cho cơ cấu một chuyển vị khả dĩ, các phần tử của hệ biến hình không bị biến dạng, do đó công khả dĩ của các nội lực luôn luôn bằng không.

Như vậy, trong trường hợp này điều kiện cân bằng theo nguyên lý công khả dĩ chỉ yêu cầu: *"tổng công khả dĩ của các ngoại lực trên những chuyển vị khả dĩ vô cùng bé tương ứng phải bằng không"*.

Ta sẽ nghiên cứu một vài phương pháp áp dụng nguyên lý công khả dĩ.

### A. Phương pháp áp dụng trực tiếp nguyên lý công khả dĩ

Nội dung của phương pháp như đã trình bày ở mục 11.1.

**Thứ tự áp dụng:**

1. Loại bỏ liên kết cần tìm phản lực  $S$  trong đó.
2. Gây cho hệ một chuyển vị khả dĩ vô cùng bé, phù hợp với điều kiện liên kết.
3. Thiết lập điều kiện cân bằng theo nguyên lý công khả dĩ:

$$S \cdot \Delta_S + \sum P_i \cdot \Delta_i = 0, \quad (11.1)$$

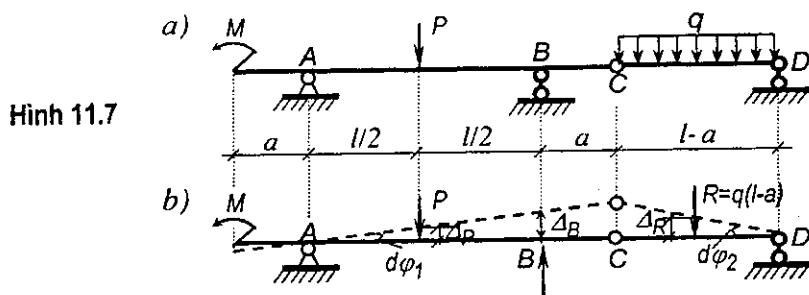
trong đó:

$S$  – đại lượng cần xác định;

$P_i$  – ngoại lực tác dụng trên hệ ( $P_i$  có thể là lực tập trung, mômen tập trung hoặc lực phân bố; với lực phân bố, được phép hợp lực trong phạm vi từng miếng cứng);

$\Delta_i, \Delta_S$  – chuyển vị khả dĩ vô cùng bé tương ứng với điểm đặt và phương của các lực  $P_i$ , lực  $S$ . Các  $\Delta_i, \Delta_S$  là chuyển vị thẳng hay chuyển vị xoay tùy theo  $P_i$  và  $S$  là lực tập trung hay mômen tập trung.

**Ví dụ 11.1.** Xác định phản lực  $B$  trong dầm ghép tĩnh định trên hình 11.7a.



Loại bỏ gối tựa  $B$  và thay thế tác dụng bằng phản lực cần tìm  $B$  (hình 11.7b). Gây chuyển vị khả dĩ bất kỳ phù hợp với điều kiện liên kết như đường đứt nét trên hình 11.7b. Áp dụng nguyên lý công khả dĩ, ta có:

$$B \cdot \Delta_B + M \cdot d\varphi_1 - P \cdot \Delta_P - q(l-a) \Delta_R = 0.$$

Từ trên hình vẽ ta thấy:  $(l-a) d\varphi_2 = (l+a) d\varphi_1$ ;

$$\Delta_B = l \cdot d\varphi_1; \quad \Delta_P = \frac{l}{2} \cdot d\varphi_1; \quad \Delta_R = \frac{l-a}{2} d\varphi_2 = \frac{l+a}{2} d\varphi_1.$$

Do đó, điều kiện cân bằng có dạng:

$$B \cdot l \cdot d\varphi_1 + M \cdot d\varphi_1 - P \cdot \frac{l}{2} \cdot d\varphi_1 - q(l-a) \frac{l+a}{2} d\varphi_1 = 0.$$

Suy ra: 
$$B = \frac{P}{2} + \frac{q}{2l}(l^2 - a^2) - \frac{M}{l}.$$

## B. Phương pháp cực

Phương pháp cực được xây dựng trên cơ sở nguyên lý công khả dĩ nhưng áp dụng dưới dạng khác.

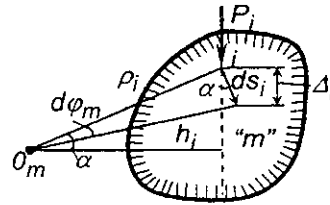
Xét một miếng cứng  $m$  bất kỳ của hệ biến hình. Giả sử trên miếng cứng  $m$  có đặt các lực  $P_i$  và trong quá trình hệ chuyển vị khả dĩ, miếng cứng  $m$  quay xung quanh tâm quay tức thời  $O_m$  gọi là cực (hình 11.8) với góc vô cùng bé là  $d\varphi_m$ . Ta hãy tính công khả dĩ của một lực  $P_i$  bất kỳ trên chuyển dời khả dĩ tương ứng:

$$P_i \cdot \Delta_i = P_i \cdot ds_i \cdot \cos \alpha.$$

Nhưng  $ds_i = \rho_i d\varphi_m = (h_i / \cos \alpha) d\varphi_m$ ,

nên  $P_i \cdot \Delta_i = P_i h_i d\varphi_m = M_{O_m} d\varphi_m$ ,

với  $M_{O_m}$  là mômen của lực  $P_i$  lấy đối với cực  $O_m$  của miếng cứng  $m$  có đặt lực  $P_i$ .



Hình 11.8

Như vậy, công khả dĩ của lực  $P_i$  tác dụng trên miếng cứng  $m$  có thể mô tả dưới dạng tích của mômen của lực  $P_i$  đối với cực  $O_m$  và góc quay khả dĩ  $d\varphi_m$  của miếng cứng  $m$ .

Do đó, ta có thể phát biểu điều kiện cân bằng như sau:

*Nếu hệ biến hình có một bậc tự do ở trong trạng thái cân bằng thì tổng mômen của tất cả các ngoại lực tác dụng trên mỗi miếng cứng lấy đối với cực của miếng cứng tương ứng nhân với góc quay khả dĩ vô cùng bé của miếng cứng tương ứng phải bằng không.*

$$\sum_m M_{O_m} d\varphi_m = 0, \quad (11.2)$$

trong đó:  $M_{O_m}$  – mômen của các lực tác dụng trên miếng cứng  $m$  lấy đối với cực  $O_m$  của miếng cứng  $m$ .

Dấu tổng lấy theo số lượng các miếng cứng trong hệ.

Tích số  $M_{O_m} d\varphi_m$  dương khi  $M_{O_m}$  và  $d\varphi_m$  xoay cùng chiều.

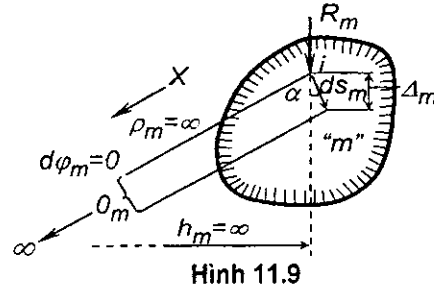
Trường hợp đặc biệt, khi cực  $O_m$  của miếng cứng  $m$  ở xa vô cùng theo phương  $X$  nào đó thì miếng cứng sẽ chuyển vị tịnh tiến theo phương vuông góc với phương  $X$ . Lúc này điều kiện cân bằng (11.2) có dạng vô định.

Thật vậy, từ hình 11.9 ta thấy:

$$M_{O_m} = R_m h_m = R_m \cdot \infty = \infty;$$

$$d\varphi_m = \frac{ds_m}{\rho_m} = \frac{\Delta_m \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot h_m} =$$

$$= \frac{\Delta_m}{h_m} = \frac{\Delta_m}{\infty} = 0.$$



trong đó:

$R_m$  – hợp lực của các lực tác dụng trên miếng cứng  $m$ ;

$\Delta_m$  – chuyển vị thẳng của miếng cứng  $m$  theo phương của hợp lực  $R_m$ .

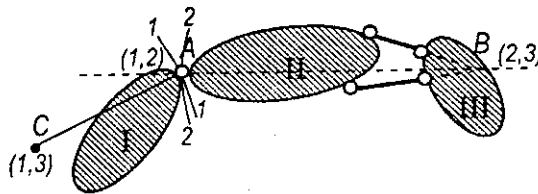
Nếu khử dạng vô định, ta sẽ được:  $M_{O_m} d\varphi_m = R_m h_m \frac{\Delta_m}{h_m} = R_m \Delta_m$ .

Nội dung phương pháp cực cũng giống như nội dung phương pháp áp dụng trực tiếp nguyên lý công khả dĩ nhưng áp dụng điều kiện cân bằng dưới dạng (11.2). Qua điều kiện (11.2) ta thấy: để áp dụng phương pháp cực, cần phải biết cực và góc xoay khả dĩ của từng miếng cứng trong hệ.

Dưới đây là một số quy tắc tìm cực:

1. Nếu hai miếng cứng nối với nhau bằng khớp hoặc hai liên kết thanh thì cực tương hỗ của hai miếng cứng đó ở tại khớp hoặc khớp giả tạo (giao điểm của hai liên kết thanh).
2. Khi chuyển vị khả dĩ, ba cực tương hỗ của ba miếng cứng trong hệ biến hình nằm trên cùng một đường thẳng.

Hình 11.10



Để chứng minh quy tắc 2, ta xét ba miếng cứng I, II và III (hình 11.10) thuộc một hệ biến hình. Cực tương hỗ (1,2) giữa miếng cứng I và II ở khớp A. Cực tương hỗ (2,3) giữa miếng cứng II và III ở tại khớp giả tạo B. Ta sẽ chứng minh rằng cực tương hỗ (1,3) giữa miếng cứng I và III phải nằm trên đường nối liền hai cực (1,2) và (2,3). Giả thiết cực (1,3) không nằm trên đường (1,2)-(2,3) mà ở tại điểm C ngoài đường (1,2)-(2,3). Lúc



này, khi xét chuyển động của miếng cứng  $I$  và  $II$  đối với miếng cứng  $III$  ta nhận thấy miếng cứng  $I$  và  $II$  quay quanh các cực  $(1,3)$  và  $(2,3)$ . Điểm  $A$  thuộc miếng cứng  $I$  sẽ chuyển dời theo đường cung  $1-1$  với tâm quay  $C$ ; nhưng điểm  $A$  còn thuộc miếng cứng  $II$  nên đồng thời cũng chuyển dời theo đường cung  $2-2$  với tâm quay là  $B$ . Hai đường cung  $1-1$  và  $2-2$  cắt nhau nên chuyển động của điểm  $A$  không thể xảy ra được. Như vậy trái với điều kiện hệ biến hình có chuyển vị khả dĩ. Điều kiện này chỉ có thể thỏa mãn khi hai đường cung  $1-1$  và  $2-2$  tiếp xúc với nhau tức là khi điểm cực  $C$  nằm trên đường  $AB$ . Đó là điều cần chứng minh.

Dựa vào hai quy tắc trên ta có thể tìm được cực tương hỗ của các miếng cứng trong hệ biến hình đồng thời tìm được quan hệ tỷ lệ giữa các góc xoay  $d\varphi_m$  của các miếng cứng.

#### **Thứ tự giải bài toán theo phương pháp cực:**

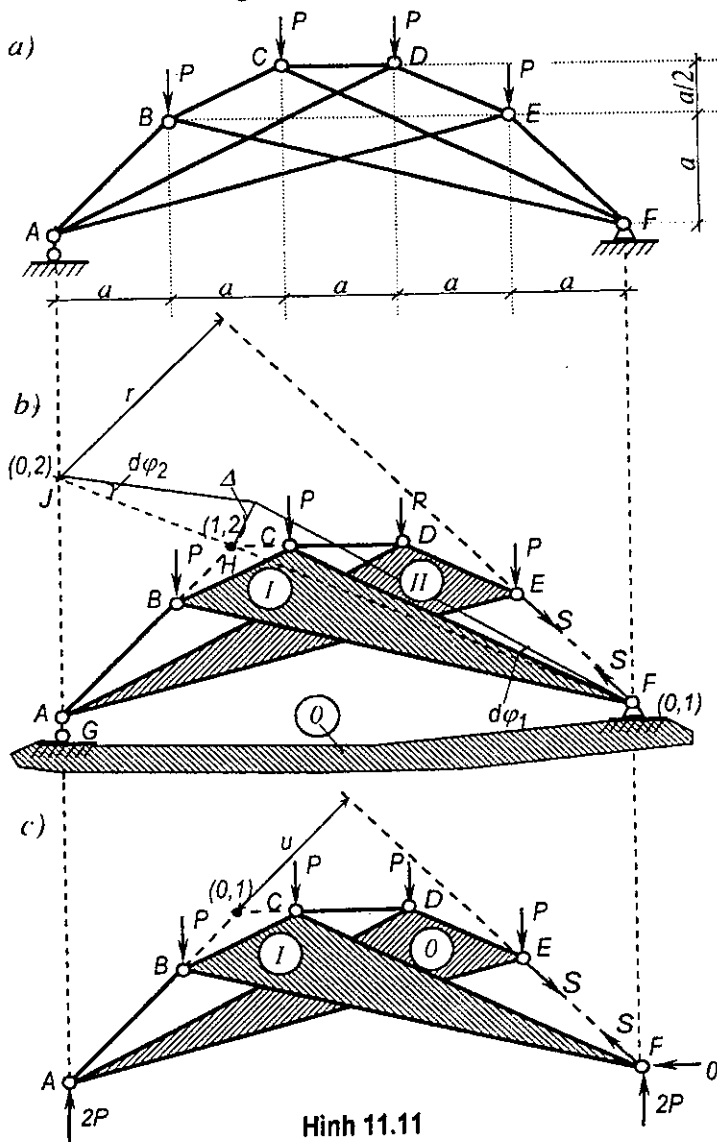
- ✦ Loại bỏ liên kết cần xác định phản lực hoặc nội lực  $S$  trong đó (xem mục 11.1). Thay thế tác dụng của liên kết bằng phản lực hoặc nội lực  $S$  tương ứng đặt theo chiều dương.
- ✦ Phân biệt và đánh số các miếng cứng. Chọn miếng cứng bất động.
- ✦ Xác định cực của các miếng cứng đối với miếng cứng bất động và cực tương hỗ giữa các miếng cứng.
- ✦ Gây cho hệ một chuyển vị khả dĩ, xác định góc xoay của các miếng cứng có đặt lực theo một góc xoay chọn tùy ý.
- ✦ Thiết lập điều kiện cân bằng (11.2) và từ đó suy ra đại lượng cần tìm  $S$ .

**Ví dụ 11.2.** Xác định nội lực  $S$  trong thanh  $EF$  của dàn Xukhốp (hình 11.11a).

- Loại bỏ thanh  $EF$ , thay thế tác dụng bằng lực  $S$  như trên hình 11.11b.
- Chọn trái đất làm miếng cứng bất động, trong hệ còn có hai miếng cứng chuyển động là  $I$  và  $II$  (hình 11.11b).
- Xác định cực của miếng cứng  $I$  và  $II$ : Miếng cứng  $I$  nối với trái đất bằng gối cố định  $F$  nên cực  $(0,1)$  ở tại  $F$ . Miếng cứng  $I$  và  $II$  nối với nhau bằng hai thanh  $AB$  và  $CD$  nên cực tương hỗ  $(1,2)$  là giao điểm  $H$  của hai đường  $AB$  và  $CD$ . Vấn đề tồn tại là phải tìm cực  $(0,2)$ .

Ta lập luận như sau: Miếng cứng  $II$  nối với miếng cứng  $O$  bằng thanh  $AG$  nên cực  $(0,2)$  buộc phải nằm trên đường thẳng  $AG$ . Miếng cứng  $II$  có

liên hệ với miếng cứng  $I$  qua cực tương hỗ  $(1,2)$ . Miếng cứng  $I$  có liên hệ với miếng cứng  $O$  qua cực tương hỗ  $(0,1)$ . Theo quy tắc về ba cực tương hỗ của ba miếng cứng trong hệ biến hình thì cực  $(0,2)$  buộc phải nằm trên đường nối liền  $(0,1)$  và  $(1,2)$  tức là đường  $FH$ . Như vậy  $(0,2)$  là giao điểm  $J$  của hai đường  $GA$  và  $FH$ .



Hình 11.11

- Cho miếng cứng  $I$  quay quanh cực  $(0,1)$  một góc  $d\varphi_1$  thuận chiều kim đồng hồ, điểm  $(1,2)$  thuộc miếng cứng  $I$  sẽ chuyển dời một đoạn  $\Delta$  theo

phương vuông góc với  $FH$ . Do kết quả chuyển động của miếng cứng  $I$ , miếng cứng  $II$  cũng chuyển dời quanh cực  $(0,2)$  một góc  $d\varphi_2$ . Vì điểm  $(1,2)$  cũng thuộc miếng cứng  $II$  mà chuyển dời của điểm  $(1,2)$  này bằng  $\Delta = FH \cdot d\varphi_1$  nên có thể xác định được  $d\varphi_2$  từ điều kiện:

$$\Delta = FH \cdot d\varphi_1 = -JH \cdot d\varphi_2 ,$$

suy ra: 
$$d\varphi_2 = -\frac{FH}{JH} d\varphi_1 = -\frac{7}{3} d\varphi_1 .$$

Dấu trừ biểu thị  $d\varphi_2$  quay ngược chiều với  $d\varphi_1$  (hình 11.11b).

- Áp dụng điều kiện cân bằng (11.2) với chú ý là góc  $d\varphi_1$  quay thuận chiều kim đồng hồ còn góc  $d\varphi_2$  quay ngược chiều kim đồng hồ, ta có:

$$-(P \cdot 4a + P \cdot 3a) d\varphi_1 - (P \cdot 3a + P \cdot 4a + S \cdot r) d\varphi_2 = 0 ,$$

hay 
$$-7aP d\varphi_1 - (7aP + Sr) \frac{7}{3} d\varphi_1 = 0 .$$

Suy ra 
$$S = -\frac{10Pa}{r} .$$

Dấu trừ chứng tỏ lực  $S$  có chiều ngược với chiều đã giả thiết tức là lực nén.

**Chú thích:** Đối với những hệ nối với trái đất bằng các gối tựa tương đương ba liên kết thanh và có thể dễ dàng xác định phản lực trong các gối tựa bằng các phương pháp đã quen thuộc thì tiện lợi hơn cả là nên loại bỏ trái đất và thay thế bằng các phản lực tựa. Lúc này số lượng miếng cứng cần phải xét sẽ giảm bớt, do đó tính toán sẽ đơn giản hơn.

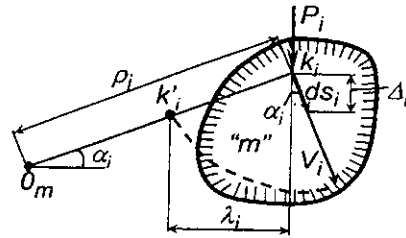
Ví dụ đối với dàn Xukhốp vừa xét, sau khi bỏ trái đất và thay thế bằng các phản lực (hình 11.11c) ta được một hệ chỉ gồm hai miếng cứng  $ADE$  và  $BCE$ . Nếu coi miếng cứng  $ADE$  là bất động (ký hiệu là miếng cứng 0) thì hệ chỉ còn một miếng cứng chuyển động là  $BCF$  (ký hiệu là 1). Cực  $(0,1)$  của miếng cứng 1 là giao điểm của hai thanh  $AB$  và  $CD$ . Cho miếng cứng 1 chuyển vị khả dĩ một góc  $d\varphi_1$  quanh cực  $(0,1)$  theo chiều kim đồng hồ và viết điều kiện cân bằng, ta có:

$$\left( -\frac{Pa}{2} + P \cdot \frac{a}{2} - 2P \cdot \frac{7a}{2} - S \cdot u \right) d\varphi_1 = 0 . \quad \text{Suy ra:} \quad S = -\frac{7Pa}{u} .$$

### C. Phương pháp điểm tương trưng

Cũng như phương pháp cực, phương pháp điểm tương trưng được xây dựng trên cơ sở nguyên lý công khả dĩ nhưng điều kiện cân bằng được thể hiện dưới hình thức khác tiện lợi hơn.

Xét miếng cứng  $m$  bất kỳ của hệ biến hình trên đó có đặt các lực  $P_i$ . Giả sử trong khi hệ chuyển vị khả dĩ, miếng cứng  $m$  quay quanh tâm quay tức thời  $O_m$ , điểm đặt lực bất kỳ  $P_i$  chuyển dời theo phương vuông góc với bán kính quay  $\rho_i$  một đoạn  $ds_i$  với vận tốc là  $V_i$  (hình 11.12).



Hình 11.12

Véc tơ vận tốc vuông góc với bán kính quay nên:

$$ds_i = V_i dt ;$$

trong đó:

$V_i$  – vận tốc của điểm đặt lực  $P_i$ ;

$t$  – thời gian.

Lúc này, điều kiện cân bằng theo nguyên lý công khả dĩ viết như sau:

$$\sum_m P_i \Delta_i = \sum_m P_i ds_i \cos(P_i, ds_i) = \sum_m P_i V_i dt \cos(P_i, V_i) = 0 .$$

Vì điều kiện này thỏa mãn với mọi  $dt$  nên có thể ước lượng  $dt$  và có điều kiện:

$$\sum_m P_i V_i \cos(P_i, V_i) = 0 . \quad (11.3)$$

Biểu thức này biểu thị điều kiện cân bằng dưới dạng công suất khả dĩ.

Nếu quay véc tơ vận tốc  $V_i$  (vẽ theo một tỷ lệ nào đó) thuận chiều kim đồng hồ một góc  $90^\circ$  cho trùng với bán kính quay và gọi đầu mút  $k'_i$  của véc tơ  $V_i$  sau khi quay là điểm tượng trưng của điểm đặt  $k_i$  của lực  $P_i$  thì từ những phép biến đổi hình học ta có thể mô tả điều kiện cân bằng (11.3) như sau:

$$\sum_m P_i V_i \cos(P_i, V_i) = \sum_m P_i V_i \cos \alpha_i = \sum_m P_i \lambda_i = 0 .$$

Ký hiệu  $M_{k'_i} = P_i \lambda_i$  là mômen của lực  $P_i$  đối với điểm tượng trưng  $k'_i$  của điểm đặt lực  $P_i$  (quy ước  $M_{k'_i}$  là dương khi  $P_i$  quay quanh  $k'_i$  thuận chiều kim đồng hồ để phù hợp với ý nghĩa công suất), ta có điều kiện cân bằng:

$$\sum_m M_{k'_i} = 0 . \quad (11.4)$$

Như vậy, nếu một hệ biến hình có một bậc tự do ở trong trạng thái cân

bằng thì tổng mômen của tất cả các lực tác dụng trên hệ đối với các điểm tượng trưng của những điểm đặt lực tương ứng phải bằng không.

Nếu trên hệ có mômen tập trung  $M$  thì thay mômen này bằng một ngẫu lực tương đương gồm hai lực  $P$  ngược chiều đặt tại hai điểm cách nhau là  $\Delta$  trong phạm vi miếng cứng đó. Lúc này mỗi lực  $P$  có giá trị là  $M/\Delta$ .

Để áp dụng điều kiện (11.4) ta cần biết cách xác định các điểm tượng trưng. Dưới đây là một số quy tắc để xác định:

1. Điểm tượng trưng  $k'_i$  của điểm  $k_i$  nằm trên bán kính vectơ của điểm  $k_i$  (theo định nghĩa).
2. Điểm tượng trưng của điểm bất động trùng với chính điểm đó. Thật vậy, khi điểm  $k_i$  bất động thì  $V_i = 0$  do đó theo định nghĩa  $k'_i$  phải trùng với  $k_i$ .
3. Hai điểm tượng trưng  $a'$ ,  $b'$  của hai điểm  $a$ ,  $b$  cùng trong một miếng cứng (hoặc không cùng trên một miếng cứng nhưng khi hệ có chuyển vị khả dĩ ta biết chắc rằng khoảng cách giữa  $a$  và  $b$  không đổi) nằm trên đường thẳng song song với đường thẳng nối liền  $a$  và  $b$  (sẽ chứng minh cùng với quy tắc 4).
4. Mỗi hình trên một miếng cứng có hình tượng trưng là một hình đồng dạng với nó.

Để chứng minh quy tắc 3 và 4, ta xét ba điểm  $a$ ,  $b$ ,  $c$  trên một miếng cứng nào đó và vẽ các điểm tượng trưng của chúng (hình 11.13) khi miếng cứng này quay quanh tâm quay tức thời  $O$  với vận tốc góc  $\omega$ . Ta có:

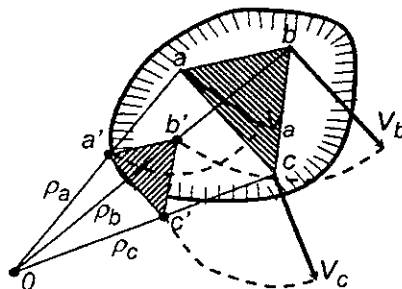
$$V_a = \rho_a \omega;$$

$$V_b = \rho_b \omega;$$

$$V_c = \rho_c \omega.$$

Quay các vectơ vận tốc một góc  $90^\circ$  theo chiều kim đồng hồ ta được điểm tượng trưng  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  với:

$$aa' = V_a; \quad bb' = V_b; \quad cc' = V_c.$$



Hình 11.13

Kết hợp với các biểu thức trên, suy ra:  $\omega = \frac{aa'}{\rho_a} = \frac{bb'}{\rho_b} = \frac{cc'}{\rho_c}$ .

Các tỷ số này chứng tỏ:  $a'b' \parallel ab$ ;  $b'c' \parallel bc$ ;  $c'a' \parallel ca$ .

Do đó tam giác  $a'b'c'$  đồng dạng với tam giác  $abc$ . Đó là điều cần chứng minh.

**Thứ tự giải bài toán theo phương pháp điểm tượng trưng:**

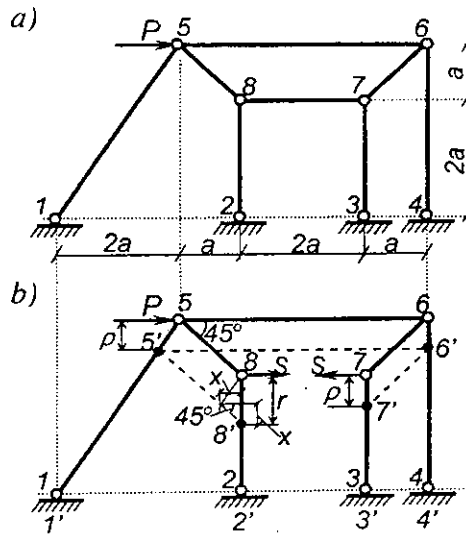
- ✦ Loại bỏ liên kết cần xác định phản lực hoặc nội lực  $S$  trong đó. Thay thế tác dụng của liên kết bằng đại lượng  $S$  tương ứng đặt theo chiều dương.
- ✦ Phân biệt các miếng cứng và chọn miếng cứng bất động. Đánh số các điểm trên các miếng cứng.
- ✦ Gây cho hệ một chuyển vị khả dĩ và xác định các điểm tượng trưng của các điểm đặt lực. Muốn vậy ta tìm một điểm có khả năng chuyển động và tự cho trước điểm tượng trưng của nó trên bán kính quay (tức là cho điểm này chuyển dời khả dĩ với vận tốc đã chọn). Tiếp đó xác định điểm tượng trưng của các điểm khác theo điểm đã chọn bằng cách sử dụng bốn quy tắc đã nêu ở trên.
- ✦ Thiết lập điều kiện cân bằng theo (11.4). Từ điều kiện cân bằng này suy ra đại lượng  $S$  cần tìm.

**Ví dụ 11.3.** Tìm nội lực trong thanh 7-8 của hệ trên hình 11.14a.

Loại bỏ liên kết và đặt lực  $S$  như trên hình 11.14b.

Chọn trái đất làm miếng cứng bất động. Theo quy tắc 2, các điểm tượng trưng  $1', 2', 3', 4'$  trùng với các điểm  $1, 2, 3, 4$ . Điểm 5 là điểm có chuyển động nên đầu tiên ta chọn điểm tượng trưng  $5'$  của nó tại vị trí cách đường 5-6 một khoảng là  $\rho$ . Tiếp đó xác định các điểm tượng trưng của 6, 7 và 8 như sau:

- **Tìm điểm  $8'$**  : Điểm 8 thuộc miếng cứng 2-8, miếng cứng này quay quanh tâm 2 nên  $8'$  phải nằm trên bán kính quay 2-8. Điểm 8 thuộc miếng cứng 5-8 nên theo quy tắc 3, điểm  $8'$  phải nằm trên đường thẳng  $5'-8'$  song song



Hình 11.14

với 5-8. Vậy điểm 8' là giao điểm của đường 2-8 và đường 5'-8' kẻ từ 5' song song với 5-8.

- *Tìm điểm 6'*: Cũng lý luận tương tự, điểm 6' là giao điểm của hai đường thẳng: đường 5'-6' kẻ từ 5' song song với 5-6 (vì điểm 6 cùng chung một miếng cứng với 5) và đường 4-6 (vì 4-6 là bán kính quay của điểm 6).
- *Tìm điểm 7'*: Điểm 7' là giao điểm của hai đường: đường thẳng 6'-7' kẻ từ 6' song song với 6-7 và đường thẳng 3-7.

Như vậy là đã tìm được đầy đủ các điểm tượng trưng của những điểm cần thiết. Áp dụng điều kiện cân bằng (11.4) ta có:

$$P \cdot \rho + S \cdot r - S \cdot \rho = 0.$$

Từ hình 11.14b ta thấy:  $r = \rho + x = \rho + \rho \tan \alpha = \rho + \rho \cdot (2a/3a) = 5\rho/3$ ,

Sau khi thay vào điều kiện cân bằng ta được:

$$S = -3P/2.$$

#### \* Đối chiếu các phương pháp động học

- ❖ Phương pháp áp dụng trực tiếp nguyên lý công khả dĩ chỉ thuận tiện đối với những hệ cho phép dễ dàng xác định các chuyển vị khả dĩ, chẳng hạn như đối với những hệ dầm.
- ❖ Phương pháp cực cho phép dễ dàng xác định chuyển vị khả dĩ vì có thể dùng định lý ba cực tương hỗ để xác định các cực. Có thể dùng phương pháp này cho những hệ phức tạp nhưng cũng chỉ nên dùng cho những hệ gồm ít miếng cứng bởi vì khi hệ có nhiều miếng cứng thì việc xác định quan hệ tỷ lệ giữa các góc  $d\varphi$  sẽ gặp nhiều khó khăn.
- ❖ Phương pháp điểm tượng trưng thích hợp với những hệ gồm nhiều miếng cứng, dễ dàng xác định được vị trí của tất cả các điểm tượng trưng cần thiết.

#### \* Đối chiếu phương pháp động học với phương pháp tĩnh học

Khi tính các hệ đơn giản thì phương pháp tĩnh học tỏ ra có nhiều tiện lợi hơn nhưng khi tính các hệ phức tạp thì phương pháp động học lại tỏ ra có nhiều điểm ưu việt hơn. Một đặc điểm của phương pháp động học là trong điều kiện cân bằng luôn luôn chỉ chứa một ẩn.

Trong thực hành, nên linh hoạt áp dụng phương pháp thích hợp cho từng hệ. Trong một hệ, với mỗi đại lượng cần tìm ta cũng có thể chọn một phương pháp thích hợp.

### 11.3. Điều kiện bất biến hình của hệ thanh có đủ số liên kết

Trong mục này giới thiệu thêm một phương pháp tiện lợi dùng để xác định sự cấu tạo hình học của hệ thanh phẳng phức tạp có đủ số liên kết.

*Tiêu chí về sự bất biến hình theo phương pháp cực cũng dẫn đến quy tắc là ba cực tương hỗ của ba miếng cứng không được nằm trên cùng một đường thẳng, nên cũng không có gì khác với những điều kiện đã xét ở chương 1.*

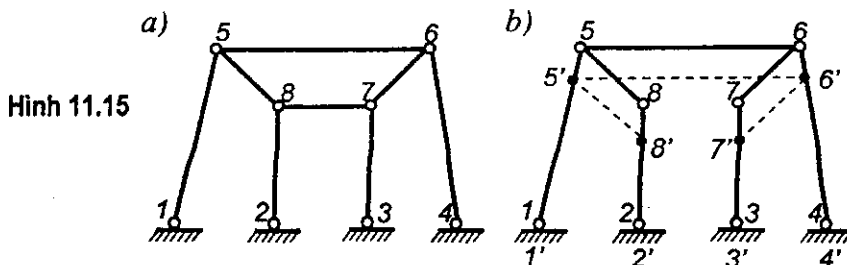
Ở đây chỉ đề cập đến *phương pháp điểm tượng trưng* là phương pháp có hiệu quả đối với những hệ phức tạp. Tiêu chí về sự bất biến hình và không bất biến hình theo phương pháp điểm tượng trưng như sau:

Sau khi đã loại bỏ khỏi hệ một liên kết thanh:

- + Nếu các điểm tượng trưng của các đầu thanh bị loại bỏ nằm trên đường thẳng không song song với chính thanh đó thì hệ bất biến hình.
- + Nếu các điểm tượng trưng của các đầu thanh bị loại bỏ nằm trên đường thẳng song song với chính thanh đó thì hệ không bất biến hình.

Thật vậy, nếu các điểm tượng trưng  $a'$ ,  $b'$  của hai đầu thanh  $ab$  bị loại bỏ song song với  $ab$  thì theo quy tắc thứ ba dùng để xác định điểm tượng trưng (xem mục 11.2) ta có thể kết luận: *trong quá trình hệ chuyển vị khả dĩ, hai điểm  $a$  và  $b$  vẫn giữ nguyên khoảng cách*. Như vậy, nếu lại đặt thanh  $ab$  vào vị trí cũ thì thanh này cũng không ngăn cản được chuyển vị khả dĩ (vì thanh  $ab$  chỉ ngăn cản được chuyển vị theo phương  $ab$  mà khoảng cách này lại không đổi) và toàn hệ vẫn tồn tại chuyển vị vô cùng bé tức là hệ không bất biến hình. Còn nếu  $a'b'$  không song song với  $ab$  thì trong quá trình hệ chuyển vị khả dĩ, khoảng cách giữa hai điểm  $a$  và  $b$  có thay đổi. Sự có mặt của thanh  $ab$  trong hệ sẽ ngăn cản sự thay đổi khoảng cách giữa  $a$  và  $b$ . Do đó hệ không chuyển dời vô cùng bé và bất biến hình.

**Ví dụ 11.4.** Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ đối xứng, có đủ số liên kết cho trên hình 11.15a.





Loại bỏ thanh 7-8 và xác định các điểm tượng trưng theo quy cách tương tự như đã nói ở ví dụ 11.3 (hình 11.15b) ta thấy hai điểm tượng trưng 7' và 8' nằm trên đường thẳng song song với thanh 7-8 (vì hệ đối xứng) nên hệ không bất biến hình.

**Ví dụ 11.5.** Khảo sát sự cấu tạo hình học của hệ có đủ số liên kết cho trên hình 11.14a.

Loại bỏ liên kết, và xác định các điểm tượng trưng như trên hình 11.14b. Ta thấy điểm 7' và 8' nằm trên đường thẳng không song song với thanh 7-8. Vậy hệ bất biến hình.

## 11.4. Cách tính hệ thanh phẳng tĩnh định chịu tải trọng di động

Cách tính hệ chịu tải trọng di động (vẽ đường ảnh hưởng) theo phương pháp động học cũng dựa trên cơ sở lý luận đã trình bày khi tính hệ với tải trọng bất động nhưng ở đây tải trọng luôn luôn chỉ là một lực  $P=I$  di động trên hệ.

Sau khi loại bỏ liên kết cần tìm đường ảnh hưởng của đại lượng  $S$  trong đó và thay tác dụng của liên kết bằng các lực  $S$ , ta gây cho hệ một chuyển vị khả dĩ rồi thiết lập điều kiện cân bằng. Ta có:

$$\sum P_i \cdot \Delta_i = 0.$$

Trong trường hợp này trên hệ chỉ có một lực  $P=I$  và các lực  $S$  nên ta có thể khai triển biểu thức trên như sau:

$$I \cdot \Delta_P + S \cdot \Delta_S = 0,$$

trong đó:

$\Delta_S$  – chuyển vị khả dĩ theo phương của các lực  $S$ , vì  $S$  không thay đổi vị trí nên  $\Delta_S$  không đổi;

$\Delta_P$  – chuyển vị khả dĩ vô cùng bé theo phương của lực  $P=I$ . Vì  $P=I$  di động nên  $\Delta_P$  cũng thay đổi theo vị trí của lực  $P=I$ .

Như vậy, khi  $P=I$  di động trên đường xe chạy, nếu ta xác định giá trị  $\Delta_P$  tương ứng với từng vị trí của  $P$  và dựng thành đồ thị thì sẽ được *biểu đồ chuyển vị*  $\Delta_P$ .

Do đó:

$$d.a.h.S = -\frac{\Delta_P}{\Delta_S}. \quad (11.5)$$

Biểu thức này chứng tỏ:

Đường ảnh hưởng của đại lượng  $S$  đồng dạng với biểu đồ chuyển vị theo phương của lực di động  $P=1$  trong hệ dầm loại bỏ liên kết và các tung độ của đ.a.h.  $S$  có giá trị tỷ lệ với tung độ của biểu đồ  $\Delta_P$  theo hệ số tỷ lệ  $-1/\Delta_S$ .

- Nếu  $\Delta_S > 0$  (chuyển vị cùng chiều với  $S$ ) thì đ.a.h.  $S$  ngược dấu với biểu đồ  $\Delta_P$ .
- Nếu  $\Delta_S < 0$  (chuyển vị ngược chiều với  $S$ ) thì đ.a.h.  $S$  cùng dấu với biểu đồ  $\Delta_P$ .

Dấu của  $\Delta_P$  được xem là dương khi  $\Delta_P$  cùng chiều với lực  $P=1$ .

Như vậy, muốn tìm đ.a.h.  $S$  ta cần tìm được biểu đồ  $\Delta_P$  và giá trị của đại lượng  $\Delta_S$ .

Ta sẽ lần lượt nghiên cứu cách xác định những đại lượng đó theo hai phương pháp: *phương pháp cực* và *phương pháp điểm tương ứng*.

### A. Phương pháp cực

**Thứ tự vẽ đ.a.h.  $S$  theo phương pháp cực:**

1. Loại bỏ liên kết cần vẽ đ.a.h của đại lượng  $S$  trong đó. Đặt các lực  $S$  tương ứng vào vị trí liên kết bị loại.
2. Phân biệt và đánh số các miếng cứng. Chọn trái đất làm miếng cứng bất động. (Cũng có thể chọn miếng cứng khác nhưng bất tiện vì sau khi vẽ được đường ảnh hưởng đối với miếng cứng bất động đó ta lại phải điều chỉnh về đ.a.h. được vẽ đối với miếng cứng là trái đất).
3. Xác định cực của các miếng cứng đối với trái đất và cực quay tương hỗ giữa các miếng cứng.
4. Vẽ biểu đồ chuyển vị theo phương của lực  $P=1$  tương ứng với các vị trí của lực  $P=1$  di động trên công trình.

Để vẽ biểu đồ  $\Delta_P$ , ta cần dựa vào những nhận xét sau:

- ❖ Đường chuyển vị của miếng cứng bất động trùng với đường chuẩn của biểu đồ  $\Delta_P$  (đường chuẩn đặt vuông góc với phương của lực  $P=1$ ).
- ❖ Đường chuyển vị của mỗi miếng cứng chuyển động là một đường thẳng cắt đường chuẩn tại điểm ứng dưới cực quay của miếng cứng đó đối với trái đất (dóng theo phương song song với lực  $P=1$ ).
- ❖ Hai đường chuyển vị của hai miếng cứng cắt nhau tại điểm ứng dưới

cực tương hỗ của hai miếng cứng đó (đóng theo phương song song với lực  $P=I$ ).

Như vậy, nếu đã biết các điểm cực thì sau khi cho một miếng cứng chuyển vị tùy ý ta sẽ vẽ được đường chuyển vị của các miếng cứng còn lại, tức là vẽ được biểu đồ  $\Delta_P$ . Tung độ của biểu đồ hướng theo chiều của  $P=I$  mang dấu dương.

5. *Xác định chuyển vị  $\Delta_S$* . Có thể xảy ra hai trường hợp:

✧ **Đại lượng  $S$  là các mômen:** lúc này liên kết bị loại là liên kết mômen (cách loại liên kết như trên hình 11.16). *Chuyển vị  $\Delta_S$  chính là tổng đại số các góc xoay của hai miếng cứng  $k$  và  $m$  có đặt lực  $S$  (hình 11.16).*

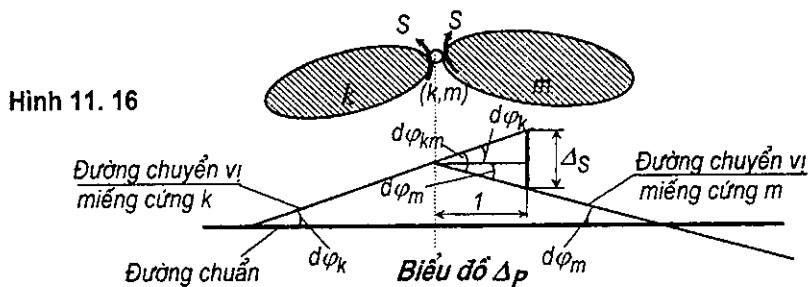
$$\Delta_S = \pm d\varphi_k \pm d\varphi_m, \quad (11.6)$$

$d\varphi_k$  hoặc  $d\varphi_m$  sẽ dương khi những góc xoay này quay cùng chiều với mômen  $S$  đặt trên miếng cứng tương ứng.

Cũng có thể quan niệm  $\Delta_S$  là góc xoay tương đối giữa hai miếng cứng có đặt đại lượng  $S$  khi hệ chuyển vị khả dĩ. Từ hình 11.16 ta dễ dàng thấy:

$$\Delta_S = \pm d\varphi_k \pm d\varphi_m = \pm d\varphi_{km}, \quad (11.7)$$

$d\varphi_{km}$  là chuyển vị góc tương đối giữa hai miếng cứng  $k$  và  $m$  trên biểu đồ  $\Delta_P$ .



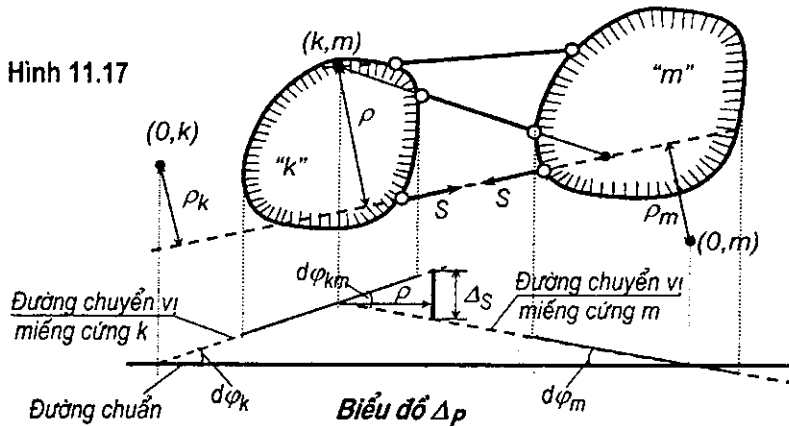
Để xác định dấu của  $\Delta_S$  theo quan niệm chuyển vị tương đối, ta giả thiết coi một miếng cứng  $k$  hoặc  $m$  là cố định, chẳng hạn coi miếng cứng  $k$  cố định và dựa vào biểu đồ  $\Delta_P$  để xem chiều quay của miếng cứng chuyển động  $m$  so với miếng cứng cố định  $k$ . Nếu miếng cứng  $m$  quay cùng chiều với mômen  $S$  đặt trên miếng cứng  $m$  thì  $\Delta_S$  mang dấu dương bởi vì lúc này mômen  $S$  sẽ sinh công dương.

Trong thực hành, ta có thể tìm tung độ biểu thị chuyển vị  $\Delta_S$  trên biểu đồ  $\Delta_P$  như sau: "Nếu trên biểu đồ chuyển vị  $\Delta_P$  từ điểm ứng dưới cực tương hỗ của hai miếng cứng có đặt các mômen  $S$  ta dóng song song với đường chuẩn một đoạn bằng đơn vị thì tại vị trí này phần tung độ khép giữa hai đường chuyển vị của hai miếng cứng có đặt mômen  $S$  chính là tung độ biểu thị giá trị  $\Delta_S$ ".

Thật vậy, từ trên hình vẽ 11.16, ta thấy phần tung độ này bằng:

$$\pm 1.d\varphi_k \pm 1.d\varphi_m = \pm 1.d\varphi_{km} = \Delta_S.$$

✧ **Đại lượng  $S$  là lực:** lúc này liên kết bị loại bỏ là liên kết thanh và  $\Delta_S$  chính là tổng đại số các chuyển vị theo phương  $S$  của hai điểm đặt lực  $S$  hay nói khác đi là độ biến thiên khoảng cách giữa hai điểm đặt lực  $S$ .



- Nếu quan niệm  $\Delta_S$  là tổng các chuyển vị theo phương của mỗi lực  $S$  riêng biệt thì (hình 11.17):

$$\Delta_S = \pm \rho_k.d\varphi_k \pm \rho_m.d\varphi_m, \quad (11.8)$$

trong đó:

$d\varphi_k$  và  $d\varphi_m$  – góc xoay của miếng cứng  $k$  và  $m$  có đặt lực  $S$ ;

$\rho_k$  và  $\rho_m$  – khoảng cách từ các cực của miếng cứng  $k$  và  $m$  đối với trục đặt đến phương tác dụng của các lực  $S$ .

Tính số  $\rho_k.d\varphi_k$  được xem là dương khi đường chuyển vị của miếng cứng  $k$  quay một góc  $d\varphi_k$  cùng chiều với chiều quay của lực  $S$  đặt trên miếng cứng  $k$  quanh cực  $(0, k)$ .

- Nếu quan niệm  $\Delta_S$  là chuyển vị tương đối của hai điểm đặt lực  $S$  theo

phương của  $S$  thì khi coi một miếng cứng có đặt lực  $S$  là bất động, chẳng hạn miếng cứng  $k$ , ta có:

$$\Delta_S = \pm \rho \cdot d\varphi_{km}, \quad (11.9)$$

trong đó:

$d\varphi_{km}$  – góc xoay tương hỗ giữa hai miếng cứng  $k$  và  $m$  có đặt các lực

$S$  trong quá trình hệ chuyển vị khả dĩ;

$\rho$  – khoảng cách từ cực tương hỗ  $(k, m)$  của hai miếng cứng  $k$  và  $m$  đến phương tác dụng của các lực  $S$ .

Để xác định dấu của  $\Delta_S$ , ta coi một miếng cứng có đặt lực  $S$  (chẳng hạn miếng cứng  $k$ ) là bất động rồi trên biểu đồ  $\Delta_P$  ta tưởng tượng quay miếng cứng còn lại (miếng cứng  $m$ ) từ miếng cứng bất động đến vị trí của nó trên biểu đồ  $\Delta_P$ . Nếu chiều quay này cùng chiều với lực  $S$  đặt trên miếng cứng chuyển động thì  $\Delta_S$  có giá trị dương.

Trong thực hành người ta thường dùng cách xác định  $\Delta_S$  theo quan niệm chuyển vị tương đối vì đơn giản hơn cách trên.

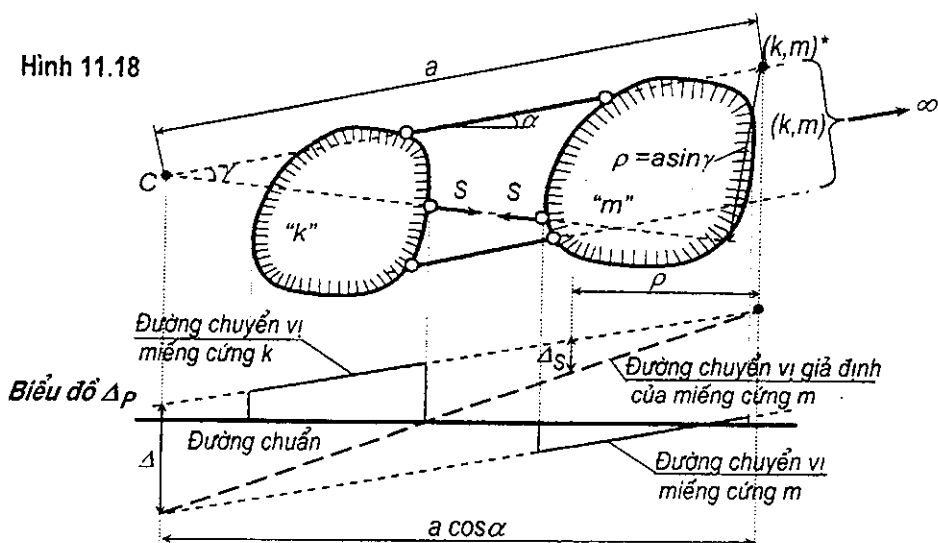
Ngoài ra, để tìm được tung độ biểu thị chuyển vị  $\Delta_S$  trên biểu đồ  $\Delta_P$ , ta thực hiện như sau: "Nếu trên biểu đồ  $\Delta_P$ , từ cực quay tương hỗ của hai đường chuyển vị của hai miếng cứng có đặt lực  $S$  ta dóng song song với đường chuẩn một đoạn bằng khoảng cách từ cực tương hỗ của hai miếng cứng trên hệ thực đến phương tác dụng của các lực  $S$  thì ở tại vị trí này, phần tung độ khép giữa hai đường chuyển vị của hai miếng cứng đang xét chính là tung độ biểu thị giá trị  $\Delta_S$ ".

Thật vậy; từ hình 11.17 ta thấy phần tung độ này bằng  $\rho \cdot d\varphi_{km}$  tức là bằng  $\Delta_S$ .

Trường hợp đặc biệt, khi cực tương hỗ  $(k, m)$  của hai miếng cứng  $k$  và  $m$  có đặt lực  $S$  ở xa vô cùng, tức là khi hai miếng cứng này được nối với nhau bằng hai thanh song song, ta có  $\rho = \infty$  còn  $d\varphi_{km} = 0$  bởi vì hai đường chuyển vị của hai miếng cứng này song song với nhau (hình 11.18). Do đó  $\Delta_S = \rho \cdot d\varphi_{km} = \infty \cdot 0$ . Vậy  $\Delta_S$  có dạng vô định. Ta sẽ tìm cách khử dạng vô định và đề ra cách tìm  $\Delta_S$  cho trường hợp này.

Giả thiết tâm quay  $(k, m)$  không ở xa vô cùng mà nằm ở một vị trí giả định  $(k, m)^*$  nào đó trên đường kéo dài của một trong hai thanh song song nối liền hai miếng cứng, chẳng hạn ở thanh trên cách giao điểm  $C$  của lực  $S$  với thanh này một khoảng tùy ý là  $a$ . Lúc này đường

chuyển vị của hai miếng cứng cắt nhau dưới cực giả định  $(k, m)^*$ . Nếu giữ nguyên đường chuyển vị của một miếng cứng (chẳng hạn miếng cứng  $k$ ) và vẽ lại đường chuyển vị của miếng cứng thứ hai (miếng cứng  $m$ ) để sao cho: hai đường này cắt nhau tại điểm ứng dưới cực giả định  $(k, m)^*$  và tung độ ứng dưới điểm  $C$  không thay đổi thì ta có thể xác định đại lượng  $\Delta_S$  theo quy cách đã trình bày ở trên với cực tương hỗ giả định  $(k, m)^*$  và các đường chuyển vị giả định (hình 11.18). Để xác nhận cách làm như vậy là đúng ta chỉ cần chứng minh giá trị  $\Delta_S$  tìm theo cách này luôn luôn không đổi với bất kỳ giá trị nào của  $a$  và ngay cả khi  $a = \infty$ .



Thật vậy, từ hai tam giác đồng dạng trên biểu đồ  $\Delta p$ , ta có:

$$\Delta_S = \Delta \cdot \rho / a \cos \alpha,$$

nhưng  $\rho = a \sin \gamma$ , nên:

$$\Delta_S = \Delta \frac{\sin \gamma}{\cos \alpha}. \quad (11.10)$$

$\Delta$ ,  $\alpha$  và  $\gamma$  không phụ thuộc  $a$  nên  $\Delta_S$  cũng không phụ thuộc  $a$  và biểu thức này nghiệm đúng với bất kỳ giá trị nào của  $a$ , ngay cả khi  $a = \infty$ . Đó là điều cần chứng minh.

Trong thực hành, khi gặp trường hợp cực tương hỗ của hai miếng cứng có đặt lực  $S$  ở xa vô cùng, ta có thể không cần xác định tung độ biểu thị  $\Delta_S$  mà chỉ cần biểu thị phần tung độ khép giữa hai đường chuyển vị

song song theo  $\Delta_S$ . Phần tung độ này bằng:

$$\Delta = \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma} \Delta_S. \quad (11.11)$$

trong đó:

$\alpha$  – góc nghiêng của hai thanh song song so với đường chuẩn;

$\gamma$  – góc hợp giữa phương của  $S$  và phương của hai thanh song song.

#### 6. Vẽ đường ảnh hưởng của đại lượng $S$

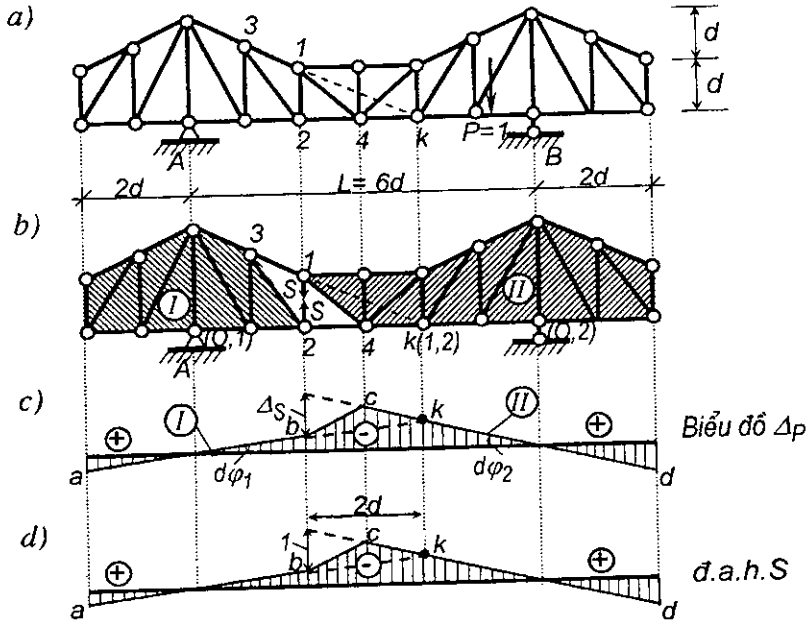
Theo biểu thức (11.5), để tìm *d.a.h.S* ta chỉ cần nhân các tung độ của biểu đồ  $\Delta_P$  với hệ số  $-1/\Delta_S$ . Như vậy ta có thể vẽ *d.a.h.S* theo quy cách sau:

- ❖ *Dạng d.a.h.S*: *d.a.h.S* đồng dạng với biểu đồ  $\Delta_P$ .
- ❖ *Đơn vị của d.a.h.S*: Phần tung độ nào biểu thị giá trị  $\Delta_S$  trên biểu đồ  $\Delta_P$  chính là phần tung độ biểu thị đơn vị của *d.a.h.S*.
- ❖ *Dấu của d.a.h.S*:
  - nếu  $\Delta_S > 0$  thì *d.a.h.S* ngược dấu với biểu đồ  $\Delta_P$ ;
  - nếu  $\Delta_S < 0$  thì *d.a.h.S* cùng dấu với biểu đồ  $\Delta_P$ .

**Ví dụ 11.6.** Vẽ đường ảnh hưởng của nội lực trong thanh 1-2 của dàn trên hình 11.19a khi đường xe chạy dưới.

1. Loại bỏ liên kết và đặt lực  $S$  như trên hình 11.19b.
2. Chọn trái đất làm miếng cứng bất động, trên hệ còn hai miếng cứng chuyển động là I và II.
3. Xác định cực của các miếng cứng. Cực (0,1) ở tại gối cố định A, cực tương hỗ (1,2) là giao điểm của hai thanh nối hai miếng I và II, hai thanh này cắt nhau tại K. Cực (0,2) là giao điểm của hai đường thẳng: đường kéo dài trục của gối tựa di động và đường thẳng nối liền hai cực tương hỗ (0,1) và (1,2). Giao điểm này ở tại điểm B.
4. Vẽ biểu đồ  $\Delta_P$ . Cho miếng cứng I quay quanh cực (0,1) một góc  $d\varphi_1$  ngược chiều kim đồng hồ thì đường chuyển vị của miếng cứng này cắt đường chuẩn tại điểm ứng dưới cực (0,1) và hợp với đường chuẩn một góc  $d\varphi_1$  ngược chiều kim đồng hồ (đường *ak* trên hình 11.19c). Đường chuyển vị của miếng cứng II cắt đường chuẩn tại điểm ứng dưới cực (0,2) và cắt đường chuyển vị của miếng cứng I tại điểm ứng dưới cực tương hỗ (1,2) (đường *kd* trên hình 11.19c). Khi  $P=I$  di động trên đường biên dưới, phân tích dụng của các đường chuyển vị của miếng

cứng  $I$  và  $II$  là những đoạn  $ab$  và  $cd$  với  $b$  và  $c$  lần lượt là điểm ứng dưới mắt 2 và mắt 4 trên đường chuyển vị của miếng cứng  $I$  và  $II$ . Phân biểu đồ  $\Delta p$  giữa hai đoạn này, tức là giữa hai miếng cứng  $I$  và  $II$  được xác định bằng đoạn  $bc$  vì điểm  $b$  và  $c$  lần lượt xác định chuyển vị của điểm 2 và điểm 4 thuộc miếng cứng 2-4. Như vậy là đã vẽ xong biểu đồ  $\Delta p$ . Phân biểu đồ nằm dưới đường chuẩn mang dấu dương còn phần nằm trên mang dấu âm.



Hình 11.19

5. *Xác định  $\Delta_s$* : Trên biểu đồ  $\Delta p$ , từ điểm  $k$  ứng dưới cực tương hỗ  $(I,2)$  dóng song song với đường chuẩn một đoạn bằng khoảng cách từ cực  $(I,2)$  trên hệ trục đến phương của lực  $S$  (đoạn này bằng  $2d$ ), phân tung độ khép giữa hai đường chuyển vị của hai miếng cứng  $I$  và  $II$  tại vị trí đó chính là  $\Delta_s$ .

Để tìm dấu của  $\Delta_s$  trên biểu đồ  $\Delta p$  ta tưởng tượng coi miếng cứng  $I$  như bất động và quay từ đường chuyển vị của miếng cứng  $I$  tới vị trí của đường chuyển vị miếng cứng  $II$ . Chiều quay này thuận chiều kim đồng hồ. Trên hệ biến hình, đứng tại cực tương hỗ  $(I,2)$ , tưởng tượng quay miếng cứng  $II$  thuận chiều kim ta thấy chiều quay này ngược



chiều với lực  $S$  đặt tại miếng cứng  $II$ . Vậy  $\Delta_S$  là âm.

6. *Vẽ đ.a.h.S*: Vì  $\Delta_S$  âm nên *đ.a.h.S* đồng dạng với  $\Delta_P$  và cùng dấu. Phần tung độ trên *đ.a.h.S* tương ứng với phần tung độ biểu thị  $\Delta_S$  trên biểu đồ  $\Delta_P$  chính là đơn vị của các tung độ *đ.a.h.S*.

**Ví dụ 11.7.** Vẽ *đ.a.h.* mômen uốn, lực cắt và lực dọc tại tiết diện  $k$  trong vòm ba khớp trên hình 11.20a.

### 1. Đường ảnh hưởng $M_k$

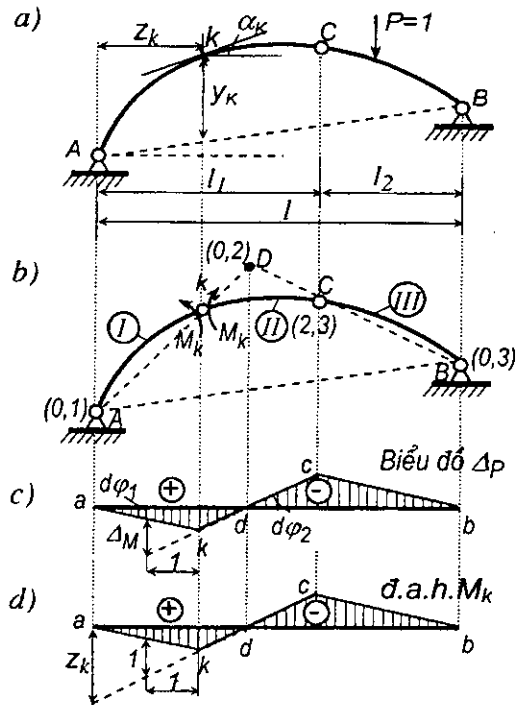
Loại bỏ liên kết và đặt các mômen uốn  $M_k$  như trên hình 11.20b. Coi trái đất là miếng cứng bất động và đánh số 0, trên hệ còn ba miếng cứng chuyển động I, II và III. Các cực (0,1) và (0,3) ở tại các khớp A và B. Các cực tương hỗ (1,2) và (2,3) ở tại  $k$  và C. Cực (0,2) là giao điểm của hai đường thẳng: đường thẳng nối cực (0,1) với cực (1,2) và đường thẳng nối cực (0,3) với cực (2,3).

Để vẽ biểu đồ  $\Delta_P$ , ta cho miếng cứng I xoay thuận

chiều kim đồng hồ một góc  $d\varphi_1$  quanh cực (0,1). Trên biểu đồ  $\Delta_P$  đường chuyển vị của miếng cứng này là đường  $ak$ .

Đường chuyển vị của miếng cứng II cắt đường chuyển vị của miếng cứng I tại điểm ứng dưới cực (1,2) và cắt đường chuẩn tại điểm ứng dưới cực (0,2). Đường chuyển vị của miếng cứng III cắt đường chuyển vị của miếng cứng II tại điểm ứng dưới cực (2,3) và cắt đường chuẩn tại điểm ứng dưới cực (0,3). Biểu đồ  $\Delta_P$  vẽ trên hình 11.20c.

Để xác định  $\Delta_M$ , trên biểu đồ  $\Delta_P$ , từ điểm ứng dưới cực (1,2) ta dóng



Hình 11.20

song song với đường chuẩn một đoạn bằng đơn vị rồi vẽ phân tung độ khép giữa hai đường chuyển vị của hai miếng cứng  $I$  và  $II$ . Phân tung độ này chính là  $\Delta_M$ . Nếu tưởng tượng cho miếng cứng  $I$  cố định, ta thấy miếng cứng  $II$  quay ngược chiều kim đồng hồ đối với miếng cứng  $I$ . Chiều quay này ngược chiều với chiều quay mômen  $M_k$  đặt trên miếng cứng  $II$  nên  $\Delta_M < 0$ .

Trong trường hợp này, *d.a.h.*  $M_k$  đồng dạng và cùng dấu với biểu đồ  $\Delta_P$  (hình 11.20d). Đơn vị của *d.a.h.*  $M_k$  là phân tung độ tương ứng với phân tung độ biểu thị  $\Delta_M$  trên biểu đồ  $\Delta_P$ .

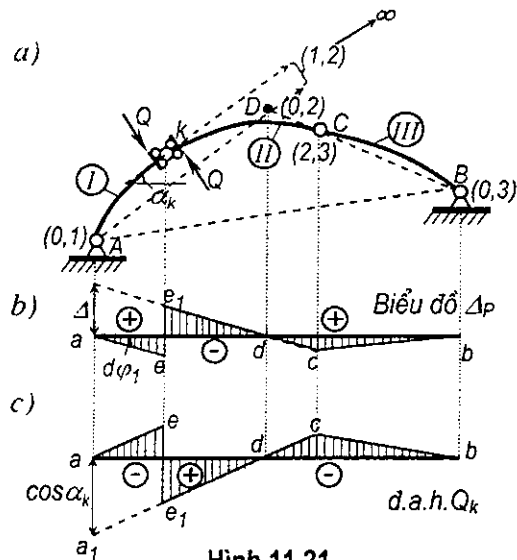
## 2. Đường ảnh hưởng $Q_k$

Cách loại bỏ liên kết, cách đặt các lực  $Q$  và cách phân biệt các miếng cứng được trình bày trên hình 11.21a.

Các cực  $(0,1)$ ,  $(0,3)$  của miếng  $I$  và  $III$  ở tại khớp  $A$  và  $B$ . Cực tương hỗ  $(2,3)$  ở tại khớp  $C$ . Cực tương hỗ  $(1,2)$  ở xa vô cùng theo phương của hai thanh song song nối hai miếng cứng  $I$  và  $II$ . Cực  $(0,2)$  là giao điểm của hai đường:

đường thẳng nối cực  $(0,3)$  với cực  $(2,3)$  và đường thẳng nối cực  $(0,1)$  với cực  $(1,2)$  tức là đường đi qua cực  $(0,1)$  và song song với phương của hai thanh song song (ngiêng so với phương ngang một góc  $\alpha_k$ ).

Để vẽ biểu đồ  $\Delta_P$ , ta cho miếng cứng  $I$  quay một góc bất kỳ  $d\varphi_1$ , và vẽ đường chuyển vị  $ae$  tương ứng. Đường chuyển vị của miếng cứng  $II$  cắt đường chuyển vị của miếng cứng  $I$  ở điểm ứng dưới cực  $(1,2)$ , nhưng cực  $(1,2)$  ở xa vô cùng nên hai đường này phải song song với nhau. Ngoài ra đường này còn phải cắt đường chuẩn ở điểm ứng dưới cực  $(0,2)$ . Đường chuyển vị của miếng cứng  $III$  cắt đường chuyển vị của miếng cứng  $II$  ở điểm ứng dưới cực  $(2,3)$  và cắt đường chuẩn ở điểm ứng



Hình 11.21

dưới cực (0,3). Biểu đồ  $\Delta_P$  vẽ trên hình 11.21b.

Trong trường hợp này, cực (1,2) ở xa vô cùng, ta có thể không cần xác định tung độ biểu thị  $\Delta_Q$  mà xác định giá trị của phần tung độ nằm giữa hai đường chuyển vị song song của hai miếng cứng I và II theo công thức (11.11):

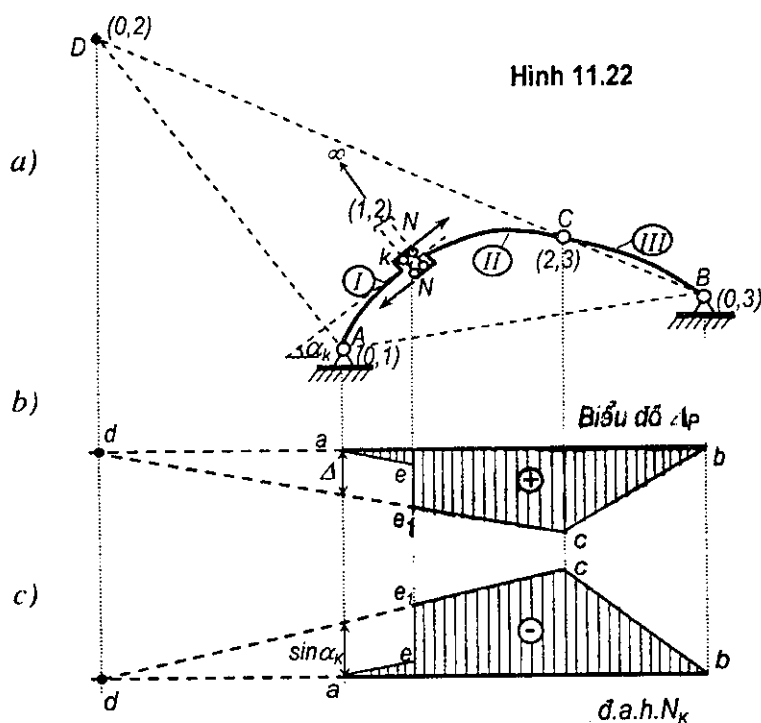
$$\Delta = \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma} \Delta_Q.$$

Ở đây:  $\gamma = 90^\circ$  còn  $\alpha = \alpha_k$  nên:  $\Delta = \Delta_Q \cos \alpha_k$ .

Để xác định dấu của  $d.a.h.Q_k$  ta cần biết dấu của  $\Delta_Q$ . Từ biểu đồ  $\Delta_P$  ta thấy hai miếng cứng I và II quay thuận chiều kim đồng hồ quanh cực của nó, chiều quay này cùng chiều với chiều quay của các lực  $Q$  đặt trên miếng cứng tương ứng quanh các cực nên  $\Delta_Q$  dương.

Vậy  $d.a.h.Q_k$  có hình dạng giống với biểu đồ  $\Delta_P$  nhưng trái dấu. Phần tung độ nằm giữa hai đường song song trên  $d.a.h.Q_k$  có giá trị bằng  $\Delta/\Delta_Q = \cos \alpha_k$ , (hình 11.21c).

### 3. Đường ảnh hưởng $N_k$



Cách tìm các cực và cách vẽ biểu đồ  $\Delta_P$  trình bày trên hình 11.22a và b. Cũng giống như trên, trong trường hợp này ta có thể xác định giá trị của phân tung độ khép giữa hai đường chuyển vị song song của hai miếng cứng I và II theo công thức (11.11). Nhưng ở đây:  $\gamma = 90^\circ$ ;  $\alpha = 90^\circ - \alpha_k$  nên:  $\Delta = \Delta_N \sin \alpha_k$ .

Từ biểu đồ  $\Delta_P$  ta thấy trong quá trình hệ chuyển vị, hai miếng cứng I và II quay thuận chiều kim đồng hồ, cùng với chiều quay của các lực N quanh cực của các miếng cứng tương ứng nên  $\Delta_N > 0$ .

Vậy *d.a.h.N<sub>k</sub>* có hình dạng giống và ngược dấu với biểu đồ  $\Delta_P$ . Phân tung độ giữa hai đường song song trên *d.a.h.N<sub>k</sub>* có giá trị bằng:  $\Delta_N \sin \alpha_k / \Delta_N = \sin \alpha_k$ .

### B. Phương pháp điểm tượng trưng

Trong phương pháp điểm tượng trưng, ta biến đổi các đại lượng  $\Delta_P$  và  $\Delta_S$  như sau (hình 11.23):

$$\Delta_P = ds_P \cos \alpha = V_P dt \cos \alpha.$$

Nhưng  $V_P = KK'$  nên:  $\Delta_P = KK' \cos \alpha dt = \lambda_P dt$ .

Tương tự:  $\Delta_S = \lambda_S dt$ .

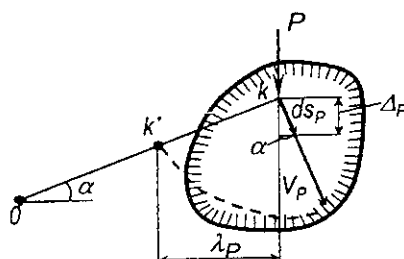
Biểu thức (11.5) có dạng:

$$d.a.h.S = - \frac{\lambda_P}{\lambda_S}, \quad (11.12)$$

trong đó:

$\lambda_P$  – hình chiếu của đoạn tượng trưng  $KK'$  lên phương vuông góc với lực P. Về ý nghĩa vật lý,  $\lambda_P$  biểu thị vận tốc chuyển vị của điểm đặt lực P theo phương của lực P. Khi P di động thì  $\lambda_P$  cũng biến thiên theo vị trí của lực P và tạo thành biểu đồ vận tốc theo phương của lực P;

$\lambda_S$  – hình chiếu của đoạn tượng trưng của điểm đặt lực S lên phương vuông góc với lực S. Về ý nghĩa vật lý,  $\lambda_S$  biểu thị vận tốc chuyển vị của điểm đặt lực S theo phương của lực S. Vì S không thay đổi vị trí nên  $\lambda_S$  cũng không đổi.



Hình 11.23

Có thể xác định dấu của  $\lambda_P$  và  $\lambda_S$  theo quy tắc sau:

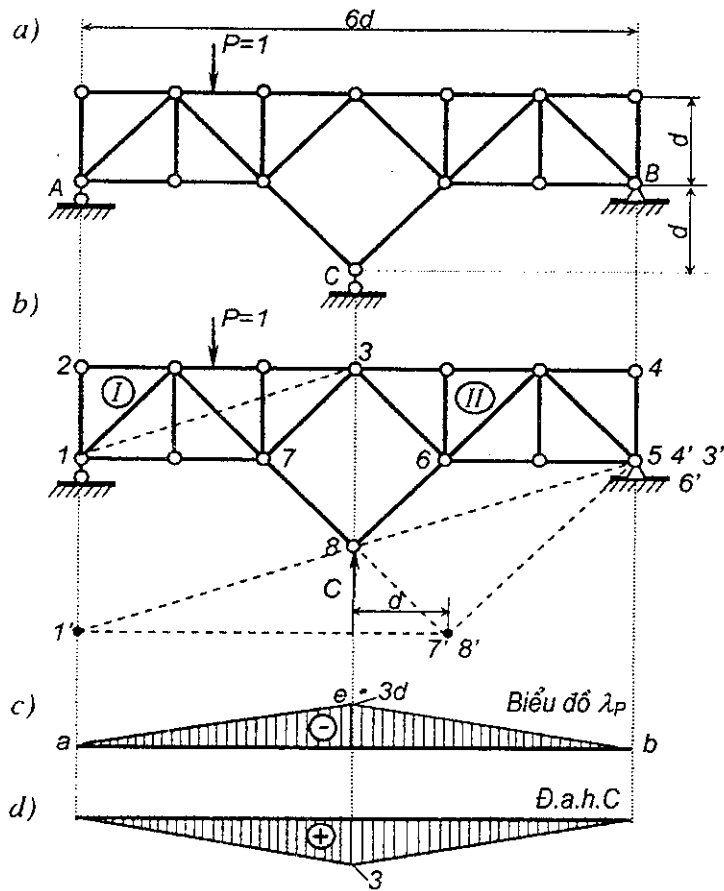
*Đặt người quan sát đứng theo phương của lực  $P$  hoặc  $S$ , nếu điểm tượng trưng ở bên trái người quan sát thì chiều của vận tốc hướng xuống phía dưới người quan sát và ngược lại, nếu điểm tượng trưng ở bên phải thì chiều của vận tốc hướng lên trên. Nếu chiều vận tốc hướng theo chiều của lực  $P$  hoặc  $S$  thì  $\lambda_P$  hoặc  $\lambda_S$  sẽ dương (theo ý nghĩa về công) còn nếu hướng ngược lại với chiều của lực  $P$  và  $S$  thì  $\lambda_P$  hoặc  $\lambda_S$  sẽ âm.*

**Thứ tự vẽ đường ảnh hưởng theo phương pháp điểm tượng trưng:**

1. Loại bỏ liên kết cần tìm d.a.h. của đại lượng  $S$  trong đó và thay thế tác dụng của liên kết này bằng các lực  $S$ .
2. Phân biệt các miếng cứng và đánh số một số điểm đặc biệt trên hệ. Cần đánh số các điểm có đặt các lực  $S$ , trên mỗi miếng cứng có lực  $P=1$  di động tối thiểu cũng phải đánh số hai điểm.
3. Tự chọn điểm tượng trưng của một điểm chuyển động nào đó và tìm điểm tượng trưng của các điểm còn lại theo điểm tượng trưng đã chọn.
4. Vẽ biểu đồ  $\lambda_P$ . Biểu đồ  $\lambda_P$  bao gồm các đường vận tốc theo phương lực  $P$  của các miếng cứng trên đường xe chạy. Đường vận tốc của mỗi miếng cứng được xác định bằng vận tốc theo phương lực  $P$  của hai điểm thuộc miếng cứng đang xét. Giá trị của thành phần vận tốc theo phương của lực  $P$  tại một điểm nào đó bằng hình chiếu của đoạn tượng trưng của điểm đang xét lên phương vuông góc với lực  $P$ . Dấu của  $\lambda_P$  được xác định theo quy tắc nêu ở trên.
5. Xác định đại lượng  $\lambda_S$ . Giá trị  $\lambda_S$  bằng tổng đại số hình chiếu của hai đoạn tượng trưng của hai điểm đặt lực  $S$  lên phương vuông góc với lực  $S$ . Dấu của  $\lambda_S$  cũng được xác định theo quy tắc nêu ở trên.
6. Vẽ d.a.h.  $S$ . Nhân các tung độ của biểu đồ  $\lambda_P$  với hệ số tỷ lệ  $-1/\lambda_S$  sẽ được d.a.h.  $S$  cần tìm.

**Ví dụ 11.8.** Vẽ đường ảnh hưởng của phản lực  $C$  trong hệ trên hình 11.24a.

Trên hình 11.24b trình bày cách loại bỏ liên kết, cách đặt lực  $C$ , cách phân biệt miếng cứng và đánh số các điểm cần thiết.



Hình 11.24

Để xác định các điểm tượng trưng, đầu tiên ta chọn vị trí điểm tượng trưng  $4'$  của điểm  $4$  trên bán kính quay của nó. Trên hình 11.24b, ta chọn  $4'$  tại điểm  $5$ . Như vậy, điểm tượng trưng  $3'$  trùng với điểm  $5$  vì  $3'$  là giao điểm của hai đường: bán kính quay  $5-3$  của điểm  $3$  và đường  $4'-3'$  song song với  $4-3$ . Cũng lập luận tương tự, điểm tượng trưng  $6'$  cũng trùng với điểm  $5$ . Điểm tượng trưng  $1'$  của điểm  $1$  là giao điểm của hai đường: bán kính quay của miếng cứng  $I$  và đường  $3'-1'$  song song với  $3-1$ . Điểm tượng trưng  $7'$  là giao điểm của đường  $1'-7'$  song song với  $1-7$  và đường  $3'-7'$  song song với  $3-7$ . Điểm tượng trưng  $8'$  là giao điểm của đường  $7'-8'$  song song với  $7-8$  và đường  $6'-8'$  song song với  $6-8$ .

Để vẽ biểu đồ  $\lambda_P$  ta nhận thấy lực  $P$  di động trên hai miếng cứng  $I$  và  $II$

nên chỉ cần tìm đường vận tốc theo phương  $P$  của hai miếng cứng này (hình 11.24c).

Đường vận tốc theo phương  $P$  của miếng cứng  $I$  được xác định bằng vận tốc theo phương  $P$  của hai điểm  $1$  và  $3$ . Hình chiếu của đoạn tượng trưng  $1-1'$  lên phương vuông góc với lực  $P$  bằng không nên tung độ của điểm  $1$  trên biểu đồ  $\lambda_P$  bằng không (điểm  $a$ ). Hình chiếu của đoạn tượng trưng  $3-3'$  lên phương vuông góc với lực  $P$  bằng  $3d$ , nên  $\lambda_P$  có giá trị bằng  $3d$ . Nếu đặt người quan sát theo phương  $P$  và chân hướng xuống phía dưới thì ta thấy điểm  $3'$  ở về phía bên phải nên vectơ vận tốc của điểm  $3$  hướng lên trên tức là hướng ngược chiều với lực  $P$ . Vậy tại điểm  $3$  ta có  $\lambda_P = -3d$ . Tại vị trí tương ứng với điểm  $3$  trên biểu đồ  $\lambda_P$  ta đóng một tung độ bằng  $-3d$  sẽ được điểm  $e$ . Nối  $a-e$  bằng đường thẳng sẽ được đường vận tốc theo phương  $P$  của miếng cứng  $I$ .

Đường vận tốc theo phương  $P$  của miếng cứng  $II$  được xác định bằng vận tốc theo phương  $P$  của hai điểm  $3$  và  $4$ . Vận tốc theo phương  $P$  của điểm  $3$  đã tìm được ở bước trên (điểm  $c$  trên biểu đồ  $\lambda_P$ ). Vận tốc theo phương  $P$  của điểm  $4$  bằng không vì hình chiếu của  $4-4'$  lên phương vuông góc với  $P$  bằng không. Do đó, tung độ tương ứng với điểm này trên biểu đồ  $\lambda_P$  có giá trị bằng không (điểm  $b$ ). Nối  $e$  với  $b$  sẽ được đường vận tốc của miếng cứng  $II$ . Như vậy là đã vẽ xong toàn bộ biểu đồ  $\lambda_P$ .

Giá trị của  $\lambda_C$  được xác định bằng hình chiếu của vectơ  $8-8'$  lên phương vuông góc với phản lực  $C$ . Giá trị này bằng  $d$ . Vì  $8'$  nằm ở phía bên phải người quan sát đứng theo phương của lực  $C$  nên vận tốc của điểm  $8$  hướng lên trên, tức là hướng theo chiều của lực  $C$ . Do đó  $\lambda_C = +d$ .

Nhân các tung độ biểu đồ  $\lambda_P$  với thừa số  $-1/\lambda_C = -1/d$ , ta được *d.a.h.C* cần tìm (hình 11.24d).

Qua những ví dụ trên ta thấy: khi vẽ *d.a.h.* của các đại lượng trong hệ tĩnh định, sử dụng phương pháp động học sẽ nhanh chóng và tiện lợi hơn so với phương pháp tĩnh học.

*Phương pháp động học cho phép ta hình dung được hình dạng của d.a.h một cách dễ dàng.*

Những ưu điểm của phương pháp động học so với các phương pháp tĩnh học càng được phát huy khi hệ khảo sát càng phức tạp.

## 11. 5. Cách tính hệ thanh siêu tĩnh

Về nguyên tắc, cách tính hệ siêu tĩnh theo phương pháp động học cũng tương tự như cách tính hệ tĩnh định nhưng nói chung khi thực hiện thì không tiện lợi bằng cách tính theo phương pháp tĩnh học. Trong trường hợp này, phương pháp động học có những nhược điểm sau:

- ✦ *Xác định chuyển vị khả dĩ trong hệ siêu tĩnh khá phức tạp* Thật vậy, sau khi loại bỏ một liên kết ra khỏi hệ, hệ còn lại không phải là hệ biến hình nên chuyển vị của hệ không thể xảy ra được nếu không có biến dạng của hệ. Do đó việc tạo chuyển vị khả dĩ có liên quan đến vấn đề xác định đường đàn hồi của hệ. Như đã biết, xác định đường đàn hồi của hệ không phải là việc dễ dàng ngay cả khi hệ là tĩnh định.
- ✦ *Sau khi đã nghiên cứu xong một đại lượng nào đó theo phương pháp động học, nếu muốn nghiên cứu một đại lượng khác ta không thể sử dụng được các số liệu của lần nghiên cứu trước.* Cũng đã có biện pháp khắc phục khuyết điểm này nhưng việc vận dụng phương pháp động học cũng chưa được tiện lợi bằng phương pháp tĩnh học.

Tuy nhiên, phương pháp động học có một ưu điểm quan trọng là giúp ta hình dung ngay được hình dạng của đường ảnh hưởng. Đó là một ưu điểm mà phương pháp tĩnh học không thể có được.

Trong mục này chỉ trình bày nguyên tắc vẽ đ.a.h. của các đại lượng trong hệ siêu tĩnh theo phương pháp động học. Trên cơ sở đó, đề cập đến cách tìm dạng đ.a.h. mà không đi sâu vào cách xác định giá trị của tất cả các tung độ đ.a.h.

Sau khi loại bỏ một liên kết khỏi hệ siêu tĩnh như đã trình bày trong mục 11.1 ta được một hệ mới bất biến hình. Lúc này khác với trường hợp hệ tĩnh định, ta thấy:

- \* *Chuyển vị của hệ xảy ra kèm theo cả biến dạng đàn hồi của hệ.* Bởi vậy không những chỉ có ngoại lực  $P=1$  và các lực  $S$  sinh công trên những chuyển vị khả dĩ mà các nội lực cũng sinh công trên những biến dạng đàn hồi của hệ.
- \* *Trong hệ siêu tĩnh, dạng chuyển vị khả dĩ không phải là duy nhất mà có nhiều dạng khác nhau.* Để thực hiện tương tự như trường hợp hệ tĩnh định, ta chỉ xét chuyển vị khả dĩ là chuyển vị đàn hồi do các lực  $S$  có giá trị bằng đơn vị và đặt theo phương của liên kết bị loại bỏ gây ra.



Ví dụ, đối với hệ siêu tĩnh trên hình 11. 25a, giả thiết  $S$  là mômen uốn tại  $k$ , ta loại bỏ liên kết và đặt lực như trên hình 11.25b. Gây cho hệ một chuyển vị khả dĩ là chuyển vị đàn hồi do các mômen  $S$  có giá trị bằng đơn vị gây ra như trên hình 11.25c, rồi áp dụng nguyên lý công khả dĩ cho trường hợp này, ta có:

$$S \cdot \delta_{SS} + I \cdot \delta_{PS} = \sum \int M \cdot \bar{M}_S \frac{ds}{EI} + \sum \int N \cdot \bar{N}_S \frac{ds}{EA} + \sum \int v \cdot \bar{Q}_S \frac{ds}{GA}, \quad (11.13)$$

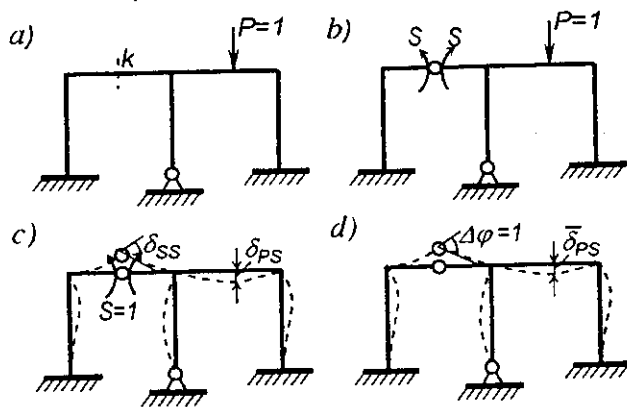
trong đó:

$\delta_{SS}$  – chuyển vị theo phương của các lực  $S$  do các lực  $S=I$  gây ra trong hệ đã loại bỏ liên kết. Đại lượng này không đổi khi lực  $P$  di động;

$\delta_{PS}$  – chuyển vị theo phương  $P$  do các lực  $S=I$  gây ra trong hệ đã loại bỏ liên kết. Đại lượng này biến thiên theo vị trí của các lực  $P$ ;

$M, N, Q$  – nội lực trong hệ đã loại bỏ liên kết do các lực  $S$  và  $P$  gây ra (hình 11.25b), nói khác đi là nội lực trong hệ cho ban đầu do tải trọng  $P$  gây ra (hình 11.25a);

$\bar{M}_S, \bar{N}_S, \bar{Q}_S$  – nội lực trong hệ đã loại bỏ liên kết do riêng các lực  $S=I$  gây ra (hình 11.25c).



Hình 11.25

Theo công thức xác định chuyển vị của hệ thanh, vế phải của (11.13) biểu thị chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của các lực  $S$  trong hệ siêu tĩnh cho ban đầu. Trên hình 11.25, chuyển vị này là góc xoay tương hỗ của hai tiết diện đặt hai bên khớp  $k$ . Thực ra trong hệ cho ban đầu, chuyển vị này bằng không nên vế phải của (11.13) luôn luôn bằng không. Tính chất này là một ưu điểm của dạng chuyển vị khả dĩ đã chọn.

Vậy: 
$$S \cdot \delta_{SS} + I \cdot \delta_{PS} = 0 \quad (11.14)$$

Suy ra: 
$$S = - \frac{\delta_{PS}}{\delta_{SS}} \quad (11.15)$$

Ta thấy, đường ảnh hưởng của đại lượng  $S$  là biểu đồ chuyển vị theo phương  $P$  do các lực  $S=I$  gây ra trong hệ đã loại bỏ liên kết sau khi nhân với hệ số  $-1/\delta_{SS}$ .

Như vậy, muốn tìm *d.a.h.S* trong hệ siêu tĩnh ta phải tính một hệ siêu tĩnh có bậc thấp hơn hệ đã cho một đơn vị và chịu các lực  $S=I$ . Tiếp đó tìm biểu đồ  $\delta_{PS}$  và xác định  $\delta_{SS}$ . Cuối cùng nhân biểu đồ  $\delta_{PS}$  với hệ số  $-1/\delta_{SS}$  sẽ được *d.a.h.S*.

Nếu khi gây chuyển vị khả dĩ tương ứng với vị trí và phương của các lực  $S$  ta không cho  $S=I$  như trên mà cho các lực  $S$  có giá trị để sao cho  $\delta_{SS} = \Delta\varphi = I$  (hình 11.25d) thì chuyển vị theo phương  $P$  sẽ là  $\delta^*_{PS}$  và ta có:

$$S = - \delta^*_{PS} \quad (11.16)$$

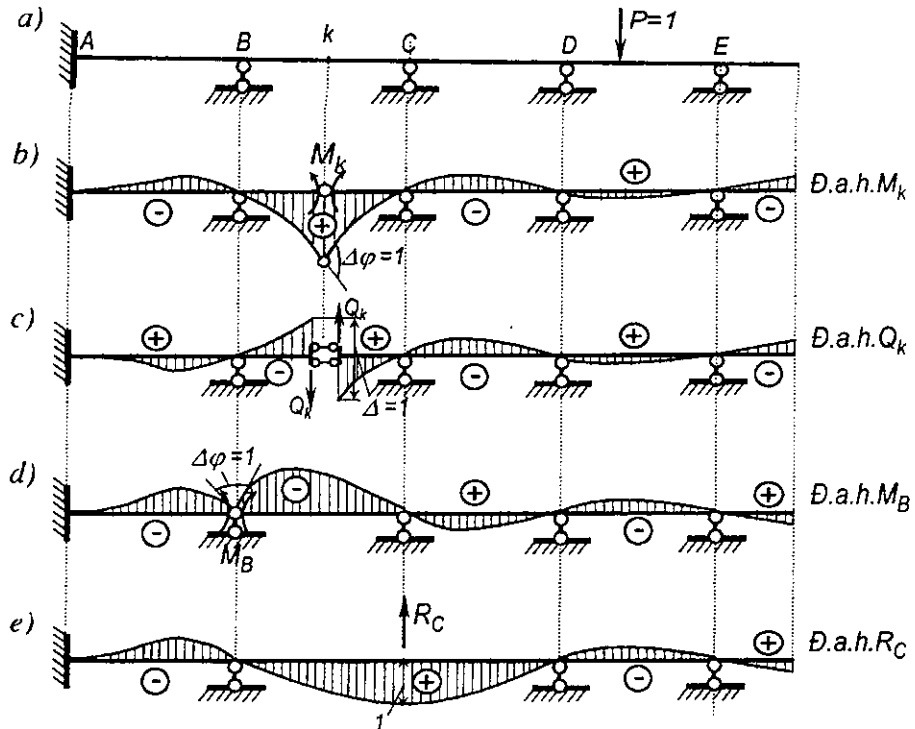
Cũng có thể xem biểu đồ  $\delta^*_{PS}$  như biểu đồ chuyển vị theo phương  $P$  do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị ( $\delta_{SS}=I$ ) tương ứng với vị trí và phương của liên kết bị loại bỏ (phương của  $S$ ) gây ra. Như vậy, ta có thể đề ra quy tắc vẽ đường ảnh hưởng của đại lượng  $S$  trong hệ siêu tĩnh theo phương pháp động học như sau:

*Sau khi đã loại bỏ liên kết cần vẽ d.a.h của đại lượng S trong đó, nếu gây cho hệ một chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tương ứng với vị trí và phương của liên kết bị loại bỏ thì biểu đồ chuyển vị theo phương P của hệ chính là d.a.h.S cần tìm nhưng ngược dấu.*

**Ví dụ 11.9.** Vẽ phác dạng *d.a.h.M<sub>k</sub>*, *d.a.h.Q<sub>k</sub>*, *d.a.h.M<sub>B</sub>* và *d.a.h* của phản lực  $C$  trong dầm liên tục trên hình 11.26a.

Trên các hình 11.26b, c, d và e trình bày cách loại bỏ liên kết, cách gây chuyển vị cưỡng bức và các dạng *d.a.h.M<sub>k</sub>*; *d.a.h.Q<sub>k</sub>*; *d.a.h.M<sub>B</sub>*; *d.a.h. C* cần tìm.

(\*) Cũng có thể thiết lập biểu thức này dễ dàng hơn theo định lý tương hỗ của công khả dĩ. Song, như vậy sẽ mất tính nhất quán về cách trình bày phương pháp động học trong cả hệ tĩnh định lẫn siêu tĩnh.



Hình 11.26

## CÂU HỎI ÔN TẬP

- 11.1. Phương pháp động học được xây dựng trên cơ sở nguyên lý nào? Khi xác định phản lực và nội lực ta cần thực hiện trên hệ như thế nào? Trình bày cách lập hệ đó tương ứng với từng thành phần nội lực.
- 11.2. Thông qua một ví dụ, trình bày thứ tự thực hiện khi xác định phản lực và nội lực trong hệ tĩnh định chịu tải trọng theo cách áp dụng trực tiếp nguyên lý công khả dĩ.
- 11.3. Phương pháp cực:
- Nội dung phương pháp.
  - Nêu các quy tắc tìm cực của các miếng cứng.
  - Nêu thứ tự thực hiện khi xác định phản lực và nội lực trong hệ tĩnh định chịu tải trọng bất động.
  - Nêu thứ tự thực hiện khi vẽ đường ảnh hưởng của phản lực và nội lực trong hệ tĩnh định.
  - Tiêu chí bất biến hình và không bất biến hình của phương pháp.
- 11.4. Phương pháp điểm tượng trưng:
- Nội dung phương pháp.
  - Nêu các quy tắc tìm điểm tượng trưng.
  - Nêu thứ tự thực hiện khi xác định phản lực và nội lực trong hệ tĩnh định chịu tải trọng bất động.
  - Nêu thứ tự thực hiện khi vẽ đường ảnh hưởng của phản lực và nội lực trong hệ tĩnh định.
  - Tiêu chí bất biến hình và không bất biến hình của phương pháp.
- 11.5. Ưu khuyết điểm của phương pháp động học khi tính các hệ tĩnh định và khi tính các hệ siêu tĩnh.
- 11.6. Trình bày cách vẽ phác dạng đường ảnh hưởng trong hệ siêu tĩnh. Tự chọn một khung siêu tĩnh có ba nhịp, vẽ phác dạng các đường ảnh hưởng: phản lực tại một liên kết; mômen uốn, lực cắt, lực dọc tại một tiết diện.

# 12 Khái niệm về cách tính theo trạng thái giới hạn

## 12.1. Khái niệm

Trong cách tính kết cấu theo ứng suất cho phép ta chỉ sử dụng một hệ số an toàn chung để đánh giá độ bền của kết cấu mà không xét một cách chặt chẽ về khả năng thay đổi đặc trưng cơ học và đặc biệt là tính dẻo của vật liệu, cũng như về khả năng thay đổi tải trọng. Thực ra độ bền của vật liệu làm mẫu thí nghiệm dùng để xác định ứng suất cho phép khác tương đối xa độ bền của vật liệu làm kết cấu đồng thời tải trọng tác dụng trên kết cấu cũng có thể có những sai lệch khác nhau.

Do đó người ta đã xây dựng cách đánh giá khác về khả năng làm việc của kết cấu. Đó là cách tính kết cấu theo *trạng thái giới hạn*.

*Trạng thái giới hạn của kết cấu là trạng thái xảy ra do ứng suất hay do chuyển vị phát triển quá mức làm cho kết cấu không thể làm việc bình thường được nữa.*

Trạng thái giới hạn của kết cấu không nhất thiết phải là trạng thái kết cấu bị phá hoại, mà chính là trạng thái kết cấu không thể làm việc bình thường được nữa. Một kết cấu không thể làm việc bình thường có thể là do mất khả năng chịu lực (chẳng hạn không đủ độ bền, không đủ ổn định hay độ chịu mỏi), hoặc do biến dạng quá mức, hoặc do phát sinh các vết nứt. Do đó có thể chia ra hai nhóm trạng thái giới hạn:

- \* **Trạng thái giới hạn về cường độ**, xác định theo khả năng chịu lực của kết cấu (về độ bền, độ ổn định và độ chịu mỏi).
- \* **Trạng thái giới hạn về sử dụng**, xác định theo sự biến dạng quá mức của kết cấu (độ cứng), sự xuất hiện các dao động, vết nứt...

So sánh với cách tính theo ứng suất cho phép, cách tính kết cấu theo trạng thái giới hạn có xét đến tính dẻo của vật liệu, thường kinh tế hơn và trong khá nhiều trường hợp lại đơn giản hơn.

Theo cách tính này, có ba loại hệ số an toàn:

1. Hệ số vượt tải (hệ số độ tin cậy)  $n$ , kể đến khả năng thay đổi của tải trọng so với tải trọng tiêu chuẩn, tức là xét đến sự sai lệch ngẫu nhiên giữa tải trọng tác dụng và tải trọng tiêu chuẩn. Tải trọng tính toán  $P_t$  sẽ bằng tải trọng tiêu chuẩn  $P_{tc}$  nhân với hệ số vượt tải  $n$  lớn hơn đơn vị.

$$P_t = P_{tc} \cdot n.$$

Khi tính về độ chịu mỗi theo trạng thái giới hạn về cường độ và khi tính về độ cứng theo trạng thái giới hạn về sử dụng, tải trọng được lấy bằng tải trọng tiêu chuẩn ( $n=1$ ).

2. Hệ số đồng chất  $k$  của vật liệu, kể đến khả năng thay đổi tính chất và giảm độ bền của vật liệu do ảnh hưởng của hình dạng và kích thước của kết cấu gây ra. Hệ số  $k > 1$ .

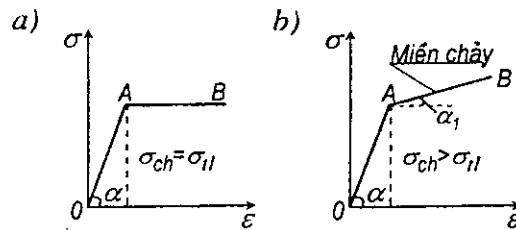
3. Hệ số điều kiện làm việc  $m$  của kết cấu, kể đến ảnh hưởng của những yếu tố bất lợi cho sự liên kết không chính xác các cấu kiện v.v... Tùy từng trường hợp cụ thể, hệ số này có giá trị tương ứng khác nhau, lớn hơn hoặc nhỏ hơn đơn vị.

Đặc trưng độ bền của vật liệu là *sức chịu tính toán*  $R_t$  vừa phụ thuộc sự đồng chất của vật liệu vừa phụ thuộc điều kiện làm việc của kết cấu, được xác định bằng *sức chịu tiêu chuẩn*  $R_{tc}$  (tức giới hạn chảy, hoặc giới hạn bền hay giới hạn mỏi tùy từng trường hợp) chia cho hệ số đồng chất  $k$  và nhân với hệ số điều kiện làm việc  $m$  ( $m < 1$ ):

$$R_t = R_{tc} \frac{m}{k}.$$

Lý thuyết tính toán kết cấu theo các trạng thái giới hạn có những nội dung phong phú và tùy theo vật liệu dòn hay vật liệu đàn dẻo, kết quả sẽ khác nhau. Trong giáo trình này chỉ giới hạn nghiên cứu với vật liệu đàn dẻo.

Lý thuyết trạng thái giới hạn được xây dựng trên biểu đồ liên hệ giữa ứng suất và biến dạng của vật liệu trong trạng thái căng một trục. Đối với vật liệu đàn dẻo lý tưởng, khi tính toán người ta thường dùng biểu đồ Prantl như trên hình



Hình 12.1

12.1a. Theo biểu đồ này, trong miền đàn hồi quan hệ giữa ứng suất  $\sigma$  và

biến dạng tỉ đối  $\varepsilon$  là quan hệ đường thẳng  $OA$ , còn trong miền đàn dẻo biểu đồ có dạng đường thẳng nằm ngang  $AB$  trong đó giới hạn chảy  $\sigma_{ch}$  trùng với giới hạn tỉ lệ  $\sigma_l$ .

Đối với một số vật liệu người ta lại dùng biểu đồ trên hình 12.1b, trong đó miền chảy  $AB$  biểu thị bởi đường thẳng nghiêng.

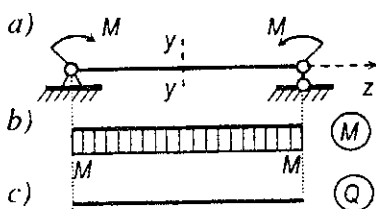
Dưới đây ta xét cách tính một số kết cấu làm bằng vật liệu đàn dẻo tuân theo biểu đồ biến dạng Prantl có chú ý đến biến dạng dẻo.

## 12.2. Cách tính dầm tĩnh định

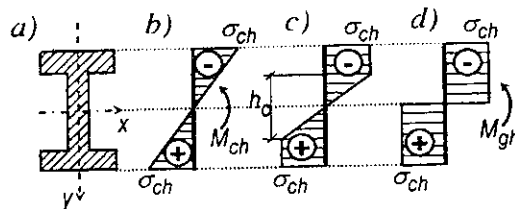
Ta khảo sát sự hình thành biến dạng dẻo trong dầm tĩnh định chịu uốn thuần túy (hình 12.2a). Biểu đồ nội lực của dầm như trên hình 12.2b, c. Tăng dần mômen uốn cho đến khi xuất hiện giới hạn chảy  $\sigma_{ch}$  tại các thớ biên của dầm, lúc đó các tiết diện dầm (hình 12.3a) có biểu đồ ứng suất pháp như trên hình 12.3b. Mômen uốn  $M_{ch}$  tương ứng được xác định theo công thức đã biết trong Sức bền vật liệu:

$$M_{ch} = \sigma_{ch} \cdot W,$$

trong đó  $W$  là mômen chống uốn của tiết diện. Lúc này dầm còn có khả năng chịu tải trọng thêm vì tất cả các thớ của dầm trừ các thớ biên còn nằm trong phạm vi đàn hồi, chưa đạt tới giới hạn chảy.



Hình 12.2



Hình 12.3

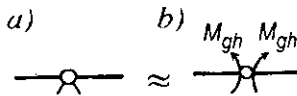
Nếu tiếp tục tăng tải trọng tác dụng sao cho  $M > M_{ch}$  ta nhận thấy ngoài các thớ biên của dầm, một số thớ khác cũng dần dần bị chảy dẻo, tiết diện chỉ còn tồn tại một phần có chiều cao  $h_o$  là nằm trong miền đàn hồi. Ta gọi phần còn nằm trong phạm vi đàn hồi này là *nhân đàn hồi* (hình 12.3c). Tiếp tục tăng tải trọng lên nữa thì đến một lúc nào đó toàn bộ tiết diện của dầm sẽ đạt tới giới hạn chảy (hình 12.3d). Lúc này dầm không có khả năng chịu tải trọng lớn hơn nữa, độ võng tăng lên rất nhanh và mômen uốn đạt tới giá trị giới hạn:

$$M = M_{gh}$$

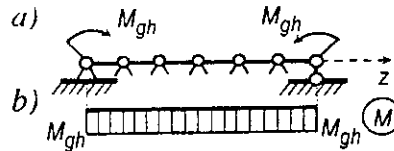
Như vậy giá trị  $M_{gh}$  là giá trị mômen uốn của dầm tương ứng với lúc dầm mất khả năng chịu lực bình thường: toàn bộ tiết diện của dầm bị chảy dẻo, dầm trở thành một hệ biến hình, tại tiết diện đó phát sinh một khớp gọi là *khớp dẻo*.

Khớp dẻo có đặc tính khác với khớp thông thường là *không thể ngăn cản kết cấu tiếp tục biến dạng theo hướng hình thành khớp dẻo, nhưng lại có khả năng ngăn cản biến dạng của kết cấu theo hướng ngược trở lại, làm cho vật liệu đang ở trạng thái chảy dẻo trở về trạng thái đàn hồi*. Do đó ta gọi khớp dẻo là "*khớp một chiều*". Trên sơ đồ hệ ta ký hiệu khớp dẻo với chiều mở về phía dưới như trên hình 12.4a. Về mặt chịu lực, khớp dẻo cũng khác với khớp thông thường là *nếu tại tiết diện phát sinh khớp dẻo ta thay khớp dẻo bằng khớp thông thường thì còn phải đặt thêm vào đó một cặp ngẫu lực ngược chiều ở hai bên tiết diện với giá trị bằng mômen giới hạn  $M_{gh}$*  (hình 12.4b).

Trong ví dụ trên hình 12.2, mọi tiết diện của dầm đều đạt tới trạng thái chảy dẻo đồng thời, nghĩa là đều phát sinh các khớp dẻo mở về phía dưới (hình 12.5). Những khớp dẻo này phân bố trên dầm và không ngăn cản được dầm biến dạng về phía dưới là hướng hình thành khớp dẻo, trái lại chúng có thể ngăn cản được biến dạng ngược lại của dầm.



Hình 12.4



Hình 12.5

Ta xác định  $M_{gh}$  tại tiết diện có khớp dẻo theo các phương trình cân bằng (hình 12.3d). Từ điều kiện tổng hình chiếu của các ứng suất pháp lên phương  $z$ , ta có:

$$\sum Z = \int_{A_k} \sigma_{ch} dA - \int_{A_u} \sigma_{ch} dA = 0.$$

Từ điều kiện tổng mômen của các ứng suất pháp bằng mômen giới hạn, ta có:

$$M_{gh} = \int_{A_k} y \sigma_{ch} dA + \int_{A_u} y \sigma_{ch} dA,$$



trong đó  $A_k, A_n$  – lần lượt là phần diện tích bị kéo và bị nén của tiết diện.

Từ phương trình thứ nhất ta suy ra  $A_k = A_n$ , nghĩa là tại tiết diện có khớp dẻo phần diện tích bị kéo đúng bằng phần diện tích bị nén.

Từ phương trình thứ hai ta xác định được:

$$M_{gh} = \int_{A_k} y \sigma_{ch} dA + \int_{A_n} y \sigma_{ch} dA = 2\sigma_{ch} \int_{A_k} y dA = 2\sigma_{ch} \int_{A_n} y dA,$$

Vậy 
$$M_{gh} = 2\sigma_{ch} |S_k| = 2\sigma_{ch} |S_n|,$$

trong đó  $S_k$  và  $S_n$  – lần lượt là mômen tĩnh của phần diện tích chịu kéo và mômen tĩnh của phần diện tích chịu nén đối với trục trung hòa.

Tương tự như bài toán trong giới hạn đàn hồi, ta biểu thị  $M_{gh}$  theo công thức quen thuộc:

$$M_{gh} = \sigma_{ch} W_d, \quad (12.1)$$

với 
$$W_d = 2|S_k| = 2|S_n|, \quad (12.2)$$

gọi là *mômen chống uốn dẻo* của tiết diện.

❖ Đối với *tiết diện chữ nhật*,  $W_d = bh^2/4$ . So với mômen chống uốn trong giới hạn đàn hồi  $W = bh^2/6$  ta có:  $W_d = 1,5W$ .

❖ Đối với *tiết diện hình chữ I*:  $W_d = (1,15 \div 1,17)W$ .

❖ Đối với *tiết diện tròn*:  $W_d = 1,7W$ .

❖ Đối với *tiết diện hình ống*:  $W_d = 1,27W$ .

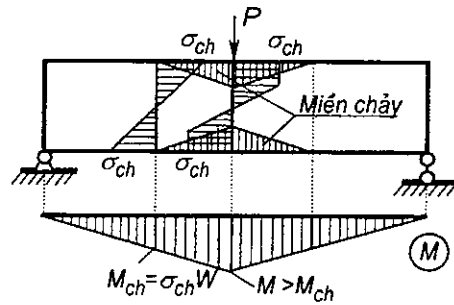
Ta nhận thấy có sự liên hệ: 
$$\frac{W_d}{W} = \frac{M_{gh}}{M_{ch}}.$$

Đối với dầm tiết diện chữ nhật, tỉ số này bằng 1,5. Như vậy khi tính dầm tiết diện chữ nhật chịu uốn thuần túy theo trạng thái giới hạn ta được phép tăng khả năng chịu mômen uốn trong dầm lên 50% so với khi tính dầm theo ứng suất cho phép tức là khi xem dầm mất khả năng chịu lực ngay từ khi mới có ứng suất ở thớ biên đạt tới trạng thái chảy dẻo.

Trong trường hợp dầm chịu uốn ngang phẳng, ngoài ứng suất pháp tác dụng, trên các tiết diện còn có ứng suất tiếp. Lúc đó bài toán sẽ phức tạp hơn, các ứng suất pháp trong dầm không thể hoàn toàn đạt tới trạng thái chảy dẻo như trên hình 12.3d, bởi vì ngoài ứng suất pháp dầm còn chịu ứng suất tiếp cho nên trên tiết diện luôn tồn tại một phần vật liệu nằm trong giới hạn đàn hồi (hình 12.6). Ngoài ra ở đây còn chưa xét đến hiện tượng

cứng cố của vật liệu. Tuy nhiên hiện tượng này cũng gây ảnh hưởng nhỏ đến kết quả tính toán nên được bỏ qua.

Để đảm bảo cho dầm chịu uốn ngang phẳng không bị chảy dẻo, lực giới hạn  $P_{gh}$  bao giờ cũng phải nhỏ hơn  $P_d$  là lực tương ứng khi tiết diện nguy hiểm nhất trên dầm có ứng suất pháp hoàn toàn chảy dẻo. Do đó sự phân bố của ứng suất pháp trong dầm chịu uốn ngang phẳng thực tế có dạng như trên hình 12.6, trong đó miền gạch thẳng đứng là miền vật liệu đạt tới trạng thái chảy dẻo.



Hình 12.6

Trong thực tế, ảnh hưởng của lực cắt đối với kết quả tính toán nhỏ cho nên thường được bỏ qua, khi đó thì tải trọng giới hạn  $P_{gh}$  sẽ lớn hơn một chút.

### 12.3. Cách tính dầm siêu tĩnh

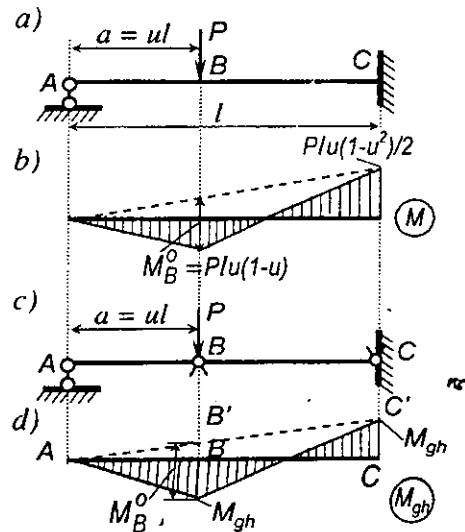
Cũng như hệ tĩnh định, sự phá hoại của dầm siêu tĩnh dưới tác dụng của tải trọng phụ thuộc vào tính chất vật liệu chế tạo dầm và khả năng phát sinh biến hình ở một bộ phận nào đó của dầm. Dưới đây ta sẽ nghiên cứu cụ thể trường hợp dầm một nhịp và trường hợp dầm nhiều nhịp.

#### A. Dầm một nhịp

##### 1. Dầm có một đầu ngàm, một đầu khớp

Giả sử cần tìm mômen uốn giới hạn của dầm siêu tĩnh một nhịp như trên hình 12.7a.

Biểu đồ mômen uốn khi dầm còn làm việc trong trạng thái đàn hồi như trên hình 12.7b. Ta nhận thấy, dầm sẽ đạt tới trạng thái giới hạn khi nó trở thành một hệ biến hình không có khả năng chịu thêm tải trọng, nghĩa là khi trên dầm phát sinh hai



Hình 12.7

khớp dẻo ở hai tiết diện để sao cho dầm có ba khớp tương hỗ thẳng hàng. Các tiết diện dễ phát sinh khớp dẻo là tiết diện  $B$  và tiết diện  $C$ , vì các tiết diện này có trị số mômen dương và mômen âm lớn hơn các tiết diện khác (hình 12.7c). Khớp dẻo  $B$  ở trong nhịp mở về phía dưới và khớp dẻo  $C$  ở ngàm mở về phía trên.

Khi dầm đạt tới trạng thái giới hạn, mômen uốn tại các tiết diện phát sinh khớp dẻo  $B, C$ , có giá trị bằng  $M_{gh}$ . Biểu đồ mômen uốn tương ứng như trên hình 12.7d. Từ hình 12.7d ta thấy các tam giác  $ABB'$  và  $ACC'$  đồng dạng nên có:

$$M_B^o = M_{gh} + BB' = M_{gh} + M_{gh} \frac{a}{l},$$

trong đó  $M_B^o$  – mômen uốn tại tiết diện  $B$  do tải trọng gây ra trong dầm đơn giản có hai khớp ở hai đầu.

$$\text{Do đó} \quad M_{gh} = \frac{l}{l+a} M_B^o. \quad (12.3)$$

Như vậy, giá trị mômen giới hạn  $M_{gh}$  trong dầm hoàn toàn xác định được nếu biết vị trí phát sinh khớp dẻo trong nhịp dầm.

Trong trường hợp dầm chịu nhiều tải trọng hay tải trọng phân bố, nói chung ta chưa biết ngay vị trí xuất hiện khớp dẻo. Lúc này, vị trí khớp dẻo được xác định sao cho biểu thức tính  $M_{gh}$  có giá trị cực đại.

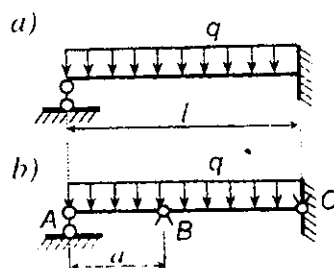
**Ví dụ 12.1.** Xác định vị trí phát sinh khớp dẻo  $B$  trong nhịp dầm chịu tải trọng phân bố đều với cường độ  $q$  kN/m (hình 12.8a).

Tại ngàm  $C$  phát sinh khớp dẻo mở về phía trên. Giả sử khớp dẻo  $B$  sẽ phát sinh ở vị trí có hoành độ  $a$  như trên hình 12.8b. Điều kiện để xác định vị trí phát sinh khớp dẻo là tìm giá trị của  $a$  sao cho  $M_{gh}$  có giá trị cực đại.

Trong trường hợp này, giá trị  $M_B^o$  trong công thức (12.3) là mômen uốn tại tiết diện có hoành độ  $a$  trong dầm đơn giản do tải trọng  $q$  gây ra:

$$M_B^o = \frac{ql}{2} a - \frac{1}{2} qa^2.$$

$$\text{Do đó:} \quad M_{gh} = \frac{ql}{2} \times \frac{a(l-a)}{l+a}.$$



Hình 12.8

Điều kiện để  $M_{gh}$  cực đại là đạo hàm của  $M_{gh}$  theo  $a$  bằng không

$$\frac{dM_{gh}}{da} = \frac{ql}{2} \left[ \frac{(l-2a)(l+a) - a(l-a)}{(l+a)^2} \right] = 0.$$

Suy ra  $a = (\sqrt{2} - 1)l = 0,414l$ ,

nghĩa là khớp dẹo  $B$  sẽ phát sinh cách khớp  $A$  một khoảng  $a = 0,414l$ .

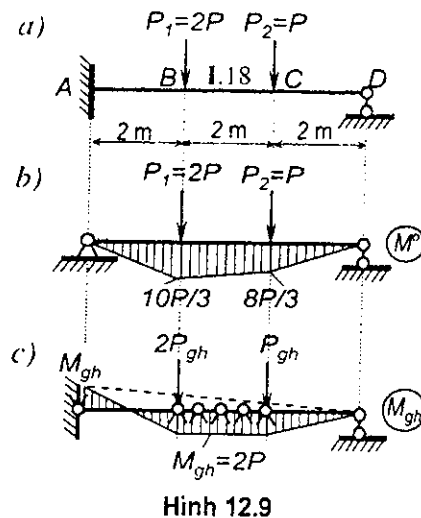
Sau khi tính được giá trị của mômen giới hạn  $M_{gh}$  trong dầm ta xác định được tải trọng giới hạn tính toán nếu đã biết tiết diện của dầm, hoặc có thể chọn được tiết diện của dầm nếu đã biết tải trọng tính toán theo điều kiện (12.1).

**Ví dụ 12.2.** Xác định tải trọng giới hạn của dầm siêu tĩnh trên hình 12.9a. Cho biết dầm bằng thép có  $\sigma_{ch} = 20 \text{ kN/cm}^2$ ; tiết diện **I.18**.

Từ bảng số liệu thép hình, với tiết diện **I.18**, mômen tĩnh của nửa tiết diện đối với trục uốn là  $S_x = 81,4 \text{ cm}^3$ . Do đó, theo (12.2):

$$W_d = 2S = 2 \cdot 81,4 = 163 \text{ cm}^3.$$

Tại ngàm  $A$  phát sinh khớp dẹo mở về phía trên. Cần tìm vị trí phát sinh khớp dẹo trong nhịp dầm. Muốn thế ta vẽ biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong dầm đơn giản có hai đầu là khớp (hình 12.9b). Qua biểu đồ ta thấy khớp dẹo có thể ở dưới tải trọng  $P_2$  hoặc dưới tải trọng  $P_1$ .



Hình 12.9

- Nếu khớp dẹo phát sinh ở dưới tải trọng  $P_1$ , áp dụng công thức (12.3) với chú ý là  $a=4 \text{ m}$  (khoảng cách từ gối di động đến lực  $P_1$ ), ta có:

$$M_{gh} = \frac{l}{l+a} M_B^0 = \frac{6}{6+4} \times \frac{10P}{3} = 2P \text{ kNm}.$$

- Nếu khớp dẹo phát sinh ở dưới tải trọng  $P_2$  áp dụng công thức (12.3) với chú ý là  $a=2 \text{ m}$  (khoảng cách từ gối di động đến lực  $P_2$ ), ta có:

$$M_{gh} = \frac{l}{l+a} M_B^0 = \frac{6}{6+2} \times \frac{8P}{3} = 2P \text{ kNm}.$$

Hai kết quả  $M_{gh}$  này bằng nhau có nghĩa là bất kỳ tiết diện nào của dầm nằm trong khoảng giữa hai lực  $P_1, P_2$  đều ở trạng thái giới hạn phát sinh khớp dẻo (hình 12.9c).

Để xác định tải trọng giới hạn của dầm ta có điều kiện (12.1):

$$M_{gh} = \sigma_{ch} \cdot W_d.$$

Trong trường hợp này ta có:

$$M_{gh} = 2P \text{ kNm}; \quad \sigma_{ch} = 20 \text{ kN/cm}^2 = 20 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2;$$

$$W_d = 163 \text{ cm}^3 = 163 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Do đó:  $2P_{gh} = 20 \cdot 10^4 \cdot 163 \cdot 10^{-6} \text{ kN}.$

Suy ra:  $P_{gh} = 16,3 \text{ kN}.$

## 2. Dầm bị ngàm hai đầu

Dầm bị ngàm hai đầu như trên hình 12.10a sẽ đạt đến trạng thái giới hạn khi ở trong dầm xuất hiện đủ ba khớp dẻo: hai khớp A, C ở hai đầu ngàm, còn khớp B ở trong nhịp dầm (hình 12.10b).

Vị trí của khớp dẻo B ở trong nhịp sẽ trùng với tiết diện có mômen uốn lớn nhất  $M_B^o$  do tải trọng gây ra trong dầm đơn giản (hình 12.10c).

Từ hình 12.10b, ta thấy:

$$M_B^o = 2M_{gh}, \text{ do đó } M_{gh} = M_B^o / 2,$$

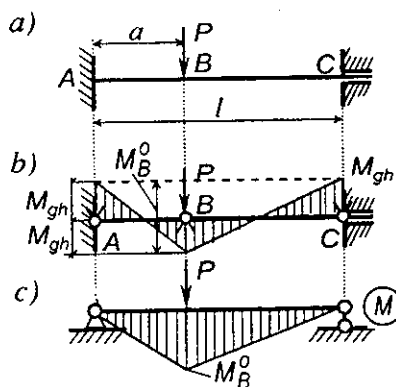
trong đó  $M_B^o$  là mômen uốn tại tiết diện B trong dầm đơn giản tức là tiết diện có mômen uốn lớn nhất.

Do đó điều kiện đạt đến trạng thái giới hạn trong trường hợp dầm có hai đầu bị ngàm sẽ là

$$M_{gh} = \frac{1}{2} M_B^o = \sigma_{ch} W_d. \quad (12.4)$$

**Ví dụ 12.3.** Chọn tiết diện chữ nhật cho dầm trên hình 12.11. Cho biết tỷ số giữa chiều cao và bề ngang của tiết diện  $h / b = 2$ ; hệ số vượt tải  $n_p = 1,5$ ;  $n_q = 1,1$ ; giới hạn chảy  $\sigma_{ch} = 20 \text{ kN/cm}^2$ .

Mômen uốn lớn nhất tại tiết diện B ở giữa nhịp dầm đơn giản:



Hình 12.10

$$M_B^o = n_P P_{tc} \frac{l}{4} + n_q q_{tc} \frac{l^2}{8}.$$

Từ điều kiện đạt đến trạng thái giới hạn (12.4) ta có:

$$M_{gh} = \frac{l}{2} M_B^o = \frac{l}{2} \left[ \frac{1,5 \cdot 20 \cdot 800}{4} + \frac{1,1 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 800^2}{8} \right] = 20W_d.$$

Suy ra  $W_d = 260 \text{ cm}^3$ .

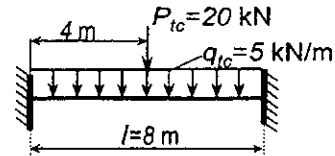
Nhưng  $W_d = bh^2/4$  với  $h/b = 2$ .

Do đó  $b \cdot (2b)^2/4 = 260 \text{ cm}^3$ .

Suy ra  $b = 6,38 \text{ cm}$ .

Ta chọn tiết diện chữ nhật có các cạnh

$b = 6,4 \text{ cm}$ ;  $h = 2b = 12,8 \text{ cm}$ .



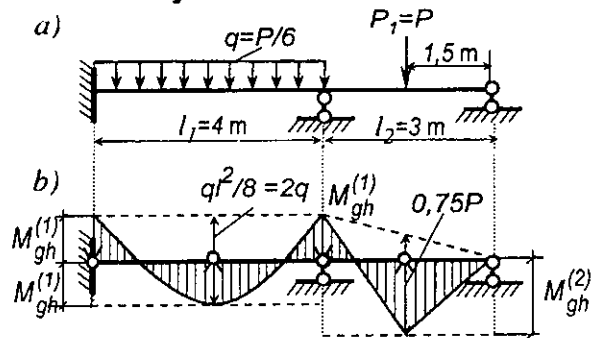
Hình 12.11

### B. Dầm liên tục có tiết diện không đổi trong từng nhịp

Trạng thái giới hạn của dầm liên tục xảy ra khi trong phạm vi một nhịp nào đó của dầm xuất hiện ba khớp dẻo lần lượt mở về các phía khác nhau. Thông thường hai khớp xuất hiện ở gối tựa, còn khớp thứ ba xuất hiện trong một nhịp dầm nào đó.

Ta sẽ xác định tải trọng giới hạn của dầm liên tục với giả thiết dầm bị phá hoại hoàn toàn trong từng nhịp một.

Giả sử xét dầm liên tục trên hình 12.12a với các số liệu như sau:



Hình 12.12

$$\sigma_{ch}^{(1)} = 20 \text{ kN/cm}^2;$$

$$\sigma_{ch}^{(2)} = 25 \text{ kN/cm}^2;$$

$$W_d^{(1)} = 250 \text{ cm}^3;$$

$$W_d^{(2)} = 400 \text{ cm}^3.$$

Trước tiên, cần biểu thị tất cả các tải trọng tác dụng trên dầm theo một thông số chung, chẳng hạn theo tải trọng  $P$ , ta có  $P_1 = P$ ;  $q = P/6$ . Tiếp đó tìm giá trị của thông số  $P$  sao cho dầm đạt tới trạng thái giới hạn.

Đối với từng nhịp dầm ta đã biết trước vật liệu ( $\sigma_{ch}$ ) và tiết diện ( $W_d$ ), do đó tìm được mômen uốn giới hạn theo công thức (12.1). Chẳng hạn trong

ví dụ này ta tính được mômen uốn giới hạn trong từng nhịp một như sau:

- Nhịp thứ nhất:  $M_{gh}^{(1)} = \sigma_{ch}^{(1)} W_d^{(1)} = 20.250 = 5000 \text{ kNcm} = 50 \text{ kNm}$ .

- Nhịp thứ hai:  $M_{gh}^{(2)} = \sigma_{ch}^{(2)} W_d^{(2)} = 25.400 = 1000 \text{ kNcm} = 100 \text{ kNm}$ .

Mômen uốn tại gối trung gian phải bằng giá trị nhỏ nhất tức là 50 kNm.

Sau khi tính được các mômen uốn giới hạn cho từng nhịp một của dầm, ta vẽ đường mômen uốn giới hạn tương ứng (đường đứt nét trên hình 12.12b). "Treo" biểu đồ mômen uốn do tải trọng đặt trên nhịp gây ra trong dầm đơn giản vào đó sẽ được kết quả như trên hình 12.12b. Từ hình này ta suy ra các tải trọng giới hạn trong từng nhịp:

- Nhịp 1:  $M_{gh}^{(1)} + M_{gh}^{(1)} = \frac{ql^2}{8}$ ;  $\Rightarrow 50+50=2q_{gh}l^2=2 \cdot \frac{1}{6} P_{gh} \Rightarrow P_{gh}=300 \text{ kN}$ .

- Nhịp 2:  $\frac{1}{2} M_{gh}^{(1)} + M_{gh}^{(2)} = \frac{3P_{gh}}{4}$ ;  $\Rightarrow 25+100=\frac{3P_{gh}}{4} \Rightarrow P_{gh}=167 \text{ kN}$ .

Như vậy, đối với toàn dầm ta phải lấy tải trọng giới hạn ứng với giá trị lực nhỏ nhất. Ta thấy dầm đạt tới trạng thái giới hạn khi nhịp thứ hai của dầm đạt tới trạng thái giới hạn (mặc dù lúc đó nhịp thứ nhất của dầm chưa đạt tới trạng thái giới hạn), tức là chọn  $P_{gh} = 167 \text{ kN}$ .

## 12.4. Cách tính dầm có tiết diện thay đổi

Sự thay đổi tiết diện thường làm cho bài toán phức tạp hơn vì các lý do sau: khó xác định vị trí của khớp dẻo, có khả năng phát sinh ba khớp dẻo liên tiếp mở về cùng một chiều, có khả năng phát sinh nhiều phương án ba khớp dẻo lần lượt mở về các phía khác nhau.

Tuy nhiên, *trạng thái giới hạn của dầm chỉ xảy ra khi có xuất hiện ba khớp dẻo lần lượt mở về các phía khác nhau và tương ứng với phương án cho giá trị tải trọng giới hạn nhỏ nhất.*

Như vậy, để giải bài toán cho trường hợp này ta cần thực hiện như sau:

1. Căn cứ vào kích thước của các tiết diện, vẽ biểu đồ mômen uốn giới hạn (nếu bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt) theo biểu thức:

$$M_{gh} = \sigma_{ch} W_d.$$

Nếu trong dầm có khả năng phát sinh cả mômen dương lẫn mômen âm thì cần vẽ biểu đồ mômen uốn giới hạn về cả hai chiều (đường nét đứt trên các hình 12.13).

2. Treo biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trong dầm đơn giản để sao cho biểu đồ này nằm trong phạm vi biểu đồ mômen uốn giới hạn và tiếp xúc tại một số điểm để sao cho hình thành ba khớp dẻo lần lượt mở về hai phía khác nhau.

- Đối với dầm đơn giản trên hình 12.13a, ta cần cho biểu đồ mômen uốn trong dầm đơn giản đi qua hai khớp biên và tiếp xúc tại một điểm nào đó ở phần dưới với biểu đồ mômen uốn giới hạn (điểm 2).

- Đối với dầm có một đầu ngàm, một đầu khớp như trên hình 12.13b, biểu đồ mômen uốn trong dầm đơn giản phải đi qua khớp 1 và tiếp xúc với biểu đồ mômen uốn giới hạn tại hai điểm 2 và 3 ở hai phía khác nhau.

- Đối với dầm bị ngàm ở hai đầu như trên hình 12.13c, biểu đồ mômen uốn trong dầm đơn giản phải tiếp xúc với biểu đồ mômen uốn giới hạn tại ba điểm 1, 2, 3 lần lượt mở về hai phía khác nhau.

3. Từ điều kiện hình học, lập điều kiện xảy ra trạng thái giới hạn. Ví dụ, với các hệ trên hình 12.13a, b, c, ta có các điều kiện xảy ra trạng thái giới hạn như sau:

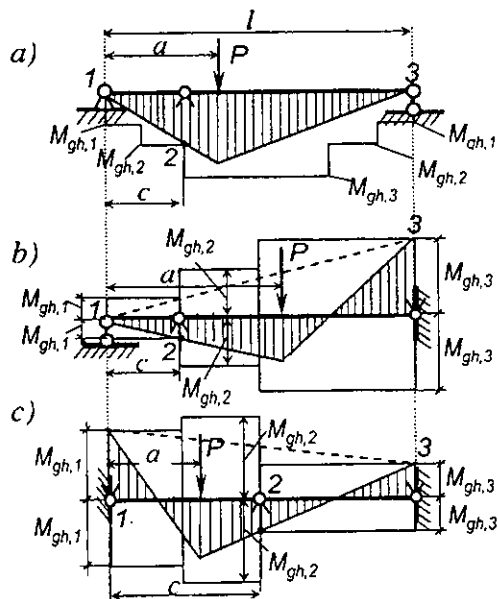
- Hình 12.13a: 
$$\frac{P(l-a)}{l}c = M_{gh,2} .$$

- Hình 12.13b: 
$$\frac{P(l-a)}{l}c = M_{gh,1} + M_{gh,3} \frac{c}{l} .$$

- Hình 12.13c: 
$$\frac{Pa}{l}(l-c) = 2M_{gh,3} + (M_{gh,1} - M_{gh,3}) \frac{(l-c)}{l} .$$

Từ các điều kiện trên, ta dễ dàng suy ra giá trị cần tìm của tải trọng giới hạn.

• Đối với dầm liên tục có tiết diện thay đổi, cách thực hiện cũng tương tự



Hình 12.13



song cần chú ý phát hiện đầy đủ các phương án hình thành ba khớp dẻo (hoặc hai khớp dẻo đối với nhịp đã có sẵn một khớp thực) lần lượt mở về hai phía khác nhau cho từng nhịp dầm.

Nếu có nhiều phương án hình thành ba khớp dẻo thỏa mãn điều kiện nêu trên thì cần thực hiện tính toán cho từng phương án để tìm ra phương án cho giá trị tải trọng giới hạn nhỏ nhất.

## 12.5. Cách tính khung và vòm siêu tĩnh

Tính khung và vòm theo trạng thái giới hạn thường phức tạp vì không phải lúc nào cũng hình dung được rõ ràng vị trí phát sinh khớp dẻo. Vị trí phát sinh khớp dẻo của khung và vòm có thể xảy ra với nhiều phương án khác nhau và phụ thuộc các giá trị nội lực  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  trong hệ.

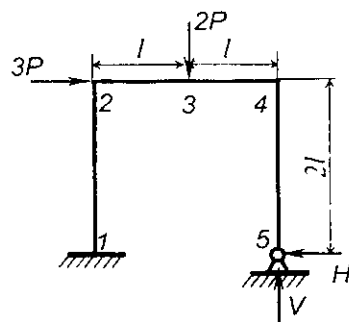
Trong nhiều trường hợp, để đơn giản hóa tính toán mà vẫn tìm được kết quả gần đúng (thậm chí có khi chính xác), ta thừa nhận những giả thiết sau:

- \* Không xét đến ảnh hưởng của lực cắt.
- \* Nội lực được xác định theo sơ đồ không biến dạng (thực ra ở trạng thái giới hạn hệ có chuyển vị lớn và nội lực sẽ thay đổi nhiều).
- \* Khớp dẻo chỉ không ngăn cản hệ có chuyển vị về phía khớp mở, và có tác dụng giảm bớt một bậc siêu tĩnh của hệ.

Hai giả thiết đầu thường làm tăng độ an toàn của kết cấu so với thực tế.

Để trình bày chi tiết hơn ta xét khung siêu tĩnh trên hình 1.14.

Các tiết diện có thể phát sinh khớp dẻo thường là tiết diện có giá trị mômen uốn dương hoặc âm lớn nhất. Do đó, trước hết ta cần nhận xét biểu đồ mômen uốn của hệ tìm được khi vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi. Hệ chỉ có các tải trọng tập trung tác dụng cho nên biểu đồ mômen uốn chỉ gồm những đoạn thẳng. Những giá trị mômen uốn dương và âm lớn nhất chỉ có thể phát sinh ở các tiết diện 1, 2, 3, 4 ghi trên hình vẽ. Tại khớp 5, giá trị mômen uốn bằng không.



Hình 12.14

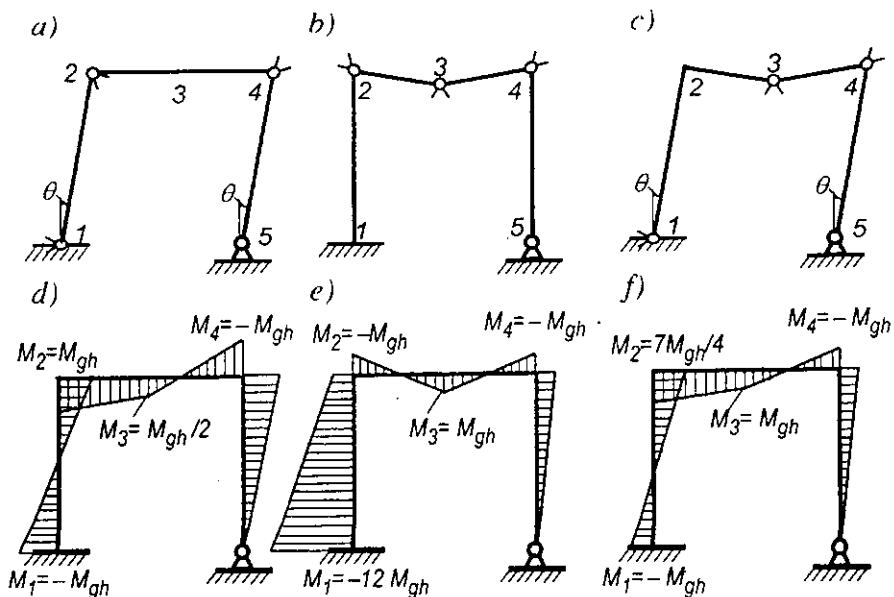
Hệ sẽ đạt tới trạng thái giới hạn khi trở thành hệ biến hình có một bậc tự do không có khả năng chịu thêm tải trọng, nghĩa là khi trên hệ siêu tĩnh phát sinh một số khớp dẻo lớn hơn số bậc siêu tĩnh của hệ một đơn vị. Cụ thể trong trường hợp này hệ sẽ đạt tới trạng thái giới hạn khi xuất hiện thêm ba

khớp dẻo bởi vì hệ này là hệ siêu tĩnh có bậc bằng hai.

Các tiết diện có thể phát sinh khớp dẻo là 1, 2, 3, 4 vì tại đó mômen uốn có giá trị dương hoặc âm lớn nhất. Trong số bốn tiết diện này chỉ cần có ba tiết diện phát sinh khớp dẻo cũng đủ làm cho hệ đạt tới trạng thái giới hạn. Cho nên, về mặt lý luận sẽ có ba phương án tổ hợp khớp dẻo khác nhau để biến hệ thành biến hình có một bậc tự do như trên hình vẽ 12.15a, b, c. Nhưng trong thực tế chỉ có một trong ba trường hợp kể trên xảy ra. Do đó cần phải phân tích xem trường hợp nào trong ba tổ hợp kể trên là duy nhất phù hợp với thực tế. Một trong những cách giải quyết vấn đề này là xuất phát từ việc tính toán các giá trị mômen uốn của hệ tìm được khi vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi. Sau đó so sánh các giá trị mômen uốn lớn nhất về trị số tuyệt đối với giá trị mômen giới hạn  $M_{gh}$  phát sinh ở các vị trí khớp dẻo ta sẽ xác định được giá trị của tải trọng giới hạn.

Gọi  $V$  và  $H$  là hai thành phần phản lực thẳng đứng và nằm ngang ở khớp tựa 5, có chiều như trên hình 12.14. Ta sẽ tính được các giá trị mômen uốn  $M_1, M_2, M_3, M_4$  ở các tiết diện 1, 2, 3, 4 khi khung làm việc trong giai đoạn đàn hồi.

$$\begin{aligned} M_4 &= -2HI; & M_3 &= -2HI + VI; \\ M_2 &= -2HI + 2VI - 2PI; & M_1 &= 2VI - 2PI - 6PI. \end{aligned}$$



Hình 12.15

Khử  $V$  và  $H$  ta được:

$$-M_2 + 2M_3 - M_4 = 2Pl; \quad (a)$$

$$-M_1 + M_2 - M_4 = 6Pl. \quad (b)$$

Sau khi tính được các giá trị mômen uốn dương và âm lớn nhất của hệ, ta sẽ phân tích vị trí khớp dẻo có thể xuất hiện.

1. Giả sử khung bị phá hoại theo tổ hợp ba khớp dẻo như trên hình 12.15a, lúc đó mômen uốn tại các tiết diện 1, 2, 4 đạt tới giá trị giới hạn  $M_{gh}$

$$M_1 = -M_{gh}; \quad M_2 = M_{gh}; \quad M_4 = -M_{gh}.$$

Thay các giá trị này vào phương trình (b), ta sẽ tính được tải trọng giới hạn ứng với trạng thái giới hạn trên hình 12.15a.

$$M_{gh} + M_{gh} + M_{gh} = 6Pl.$$

$$\text{Suy ra} \quad P = \frac{M_{gh}}{2l}.$$

Thay các giá trị vừa tìm được vào phương trình (a) ta sẽ tìm được  $M_3$ .

$$-M_{gh} + 2M_3 + M_{gh} = 2 \frac{M_{gh}}{2l} l. \quad \text{Suy ra} \quad M_3 = \frac{M_{gh}}{2}.$$

Biết các giá trị  $M_1, M_2, M_3, M_4$  và  $M_5 = 0$  của hệ, ta dễ dàng vẽ được biểu đồ mômen uốn cho toàn hệ như trên hình 12.15d. Ta thấy giá trị mômen uốn tại mọi tiết diện (trừ ba tiết diện 1, 2, 4) đều nhỏ hơn giá trị  $M_{gh}$  nghĩa là khi ba tiết diện 1, 2, 4 bị chảy dẻo thì các tiết diện khác còn lại của hệ chưa bị chảy dẻo. Như vậy, ba khớp dẻo 1, 2, 4 là ba khớp dẻo phát sinh đầu tiên, đưa hệ đạt tới trạng thái giới hạn. Đến đây ta thấy giả thiết lúc đầu không gặp mâu thuẫn gì cả, do đó tổ hợp ba khớp dẻo 1, 2, 4 phù hợp với thực tế.

2. Để thấy rõ hơn, ta tiếp tục giả thiết khung bị phá hoại theo tổ hợp ba khớp dẻo như trên hình 12.15b, nghĩa là các tiết diện 2, 3, 4 bị chảy dẻo đầu tiên. Ta có:

$$M_2 = -M_{gh}; \quad M_3 = M_{gh}; \quad M_4 = -M_{gh}.$$

Vận dụng các phương trình (a) và (b) như trong trường hợp trên ta sẽ tìm được:

$$P = 2M_{gh}/l; \quad M_1 = -12M_{gh}.$$

Căn cứ vào những số liệu trên ta cũng vẽ được biểu đồ mômen uốn ở trạng thái giới hạn tương ứng như trên hình 12.15e. Ta thấy mômen uốn tại tiết diện 1 (và tại các tiết diện khác nữa) có giá trị lớn hơn mômen uốn giới hạn. Do đó ba khớp 2, 3, 4 không thể là ba khớp dẻo đầu tiên đưa hệ

Khử  $V$  và  $H$  ta được:

$$-M_2 + 2M_3 - M_4 = 2Pl; \quad (a)$$

$$-M_1 + M_2 - M_4 = 6Pl. \quad (b)$$

Sau khi tính được các giá trị mômen uốn dương và âm lớn nhất của hệ, ta sẽ phân tích vị trí khớp dẻo có thể xuất hiện.

1. Giả sử khung bị phá hoại theo tổ hợp ba khớp dẻo như trên hình 12.15a, lúc đó mômen uốn tại các tiết diện 1, 2, 4 đạt tới giá trị giới hạn  $M_{gh}$

$$M_1 = -M_{gh}; \quad M_2 = M_{gh}; \quad M_4 = -M_{gh}.$$

Thay các giá này vào phương trình (b), ta sẽ tính được tải trọng giới hạn ứng với trạng thái giới hạn trên hình 12.15a.

$$M_{gh} + M_{gh} + M_{gh} = 6Pl. \quad \text{Suy ra} \quad P = \frac{M_{gh}}{2l}.$$

Thay các giá trị vừa tìm được vào phương trình (a) ta sẽ tìm được  $M_3$ .

$$-M_{gh} + 2M_3 + M_{gh} = 2 \frac{M_{gh}}{2l} l. \quad \text{Suy ra} \quad M_3 = \frac{M_{gh}}{2}.$$

Biết các giá trị  $M_1, M_2, M_3, M_4$  và  $M_5 = 0$  của hệ, ta dễ dàng vẽ được biểu đồ mômen uốn cho toàn hệ như trên hình 12.15d. Ta thấy giá trị mômen uốn tại mọi tiết diện (trừ ba tiết diện 1, 2, 4) đều nhỏ hơn giá trị  $M_{gh}$  nghĩa là khi ba tiết diện 1, 2, 4 bị chảy dẻo thì các tiết diện khác còn lại của hệ chưa bị chảy dẻo. Như vậy, ba khớp dẻo 1, 2, 4 là ba khớp dẻo phát sinh đầu tiên, đưa hệ đạt tới trạng thái giới hạn. Đến đây ta thấy giả thiết lúc đầu không gặp mâu thuẫn gì cả, do đó tổ hợp ba khớp dẻo 1, 2, 4 phù hợp với thực tế.

2. Để thấy rõ hơn, ta tiếp tục giả thiết khung bị phá hoại theo tổ hợp ba khớp dẻo như trên hình 12.15b, nghĩa là các tiết diện 2, 3, 4 bị chảy dẻo đầu tiên. Ta có:

$$M_2 = -M_{gh}; \quad M_3 = M_{gh}; \quad M_4 = -M_{gh}.$$

Vận dụng các phương trình (a) và (b) như trong trường hợp trên ta sẽ tìm được:

$$P = 2M_{gh} / l; \quad M_1 = -12M_{gh}.$$

Căn cứ vào những số liệu trên ta cũng vẽ được biểu đồ mômen uốn ở trạng thái giới hạn tương ứng như trên hình 12.15e. Ta thấy mômen uốn tại tiết diện 1 (và tại các tiết diện khác nữa) có giá trị lớn hơn mômen uốn giới hạn. Do đó ba khớp 2, 3, 4 không thể là ba khớp dẻo đầu tiên đưa hệ

hợp vòm có mômen uốn khá lớn. Sau khi xác định được vị trí khớp dẻo ta tiến hành tính toán tương tự như trường hợp khung siêu tĩnh.

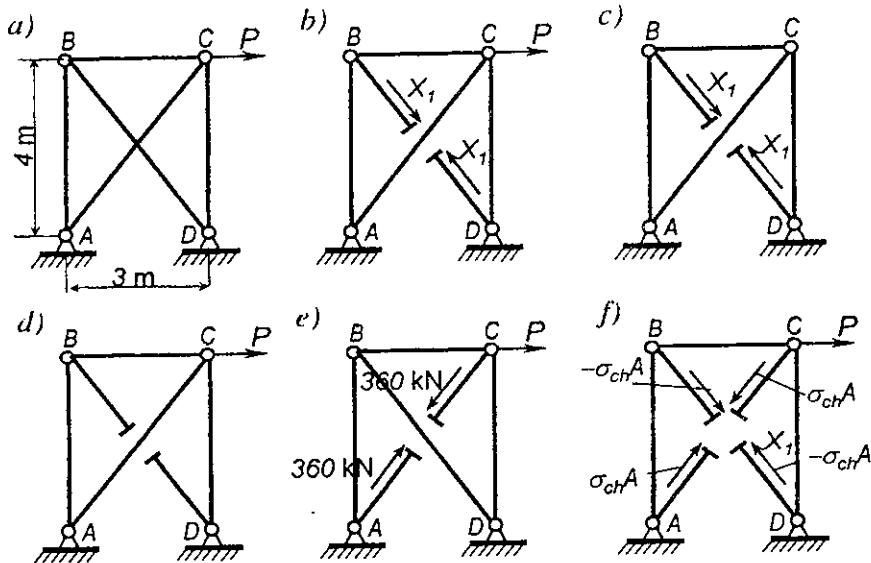
## 12.6. Cách tính dàn siêu tĩnh

*Trạng thái giới hạn của dàn được xác định theo điều kiện chảy dẻo của một số thanh mà khi loại chúng ra khỏi hệ thì dàn trở thành biến hình.*

Có thể xác định tải trọng giới hạn của dàn theo nhiều cách, chẳng hạn bằng cách khảo sát sự cân bằng theo các dạng phá hoại khác nhau của dàn tức là bằng cách khảo sát sự cân bằng của những dàn bị biến hình khác nhau do loại đi từ dàn đã cho một số thanh và thay thế tác dụng của chúng bằng các lực dọc trong các thanh đó khi đã đạt tới trạng thái chảy dẻo. Ta sẽ chọn lấy giá trị nhỏ nhất trong tất cả những tải trọng giới hạn tìm được. Thường những thanh đạt trạng thái giới hạn đầu tiên là những thanh có ứng suất lớn nhất khi xác định theo trạng thái dàn hồi.

**Ví dụ 12.4.** Xác định tải trọng giới hạn cho dàn trên hình 12.16a. Cho biết:

$$A = \text{const} = 15 \text{ cm}^2; \sigma_{ch} = 24 \text{ kN/cm}^2; h = 4 \text{ m}; l = 3 \text{ m}; E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2.$$



Hình 12.16

Hệ trên hình 12.16a có bậc siêu tĩnh bằng 1. Do đó, khi đạt tới trạng thái giới hạn trong hệ sẽ phải có hai thanh chảy dẻo. Vì chưa biết hai thanh nào của dàn chảy dẻo, cho nên ta sẽ tìm những thanh có nội lực lớn nhất theo

cách tính trong giới hạn đàn hồi.

Phương trình chính tắc:  $\delta_{II} X_I + \Delta_{IP} = 0,$

trong đó: 
$$\delta_{II} = \sum_i \frac{\bar{N}_{iI} \bar{N}_{iI} l_i}{(EA)_i}; \quad \Delta_{IP} = \sum_i \frac{\bar{N}_{iI} N_{iP}^o l_i}{(EA)_i}.$$

$\bar{N}_{iI}$  – lực dọc trong thanh thứ  $i$  của hệ cơ bản do lực  $X_I = I$  gây ra;

$N_{iP}^o$  – lực dọc trong thanh thứ  $i$  của hệ cơ bản do tải trọng  $P$  gây ra.

Hệ cơ bản và các sơ đồ tính nội lực do  $X_I = I$  và do tải trọng  $P$  gây ra trong hệ cơ bản như trên hình 12.16b, c, d. Kết quả các phép tính được ghi trong bảng 12.1.

**Bảng 12.1**

Thanh	$l_i$ (m)	$\bar{N}_{iI}$	$N_{iP}^o$	$\bar{N}_{iI} \bar{N}_{iI} l_i$	$\bar{N}_{iI} N_{iP}^o l_i$	$N_i = N_{iP}^o + \bar{N}_{iI} X_I$
AB	4,00	-4/5	0	64/25	0	0,622 P
AC	5,00	1	5P/3	5	25P/3	0,889 P
BD	5,00	1	0	5	0	-0,778 P
BC	3,00	-3/5	0	27/25	0	0,468 P
CD	4,00	-4/5	-4P/3	64/25	64P/15	-0,711 P
				405/25	189P/15	

Ta có: 
$$X_I = -\frac{\Delta_{IP}}{\delta_{II}} = -\frac{189P}{15} \times \frac{25}{405} = -0,778P.$$

Từ bảng 12.1 ta thấy thanh AC là thanh chịu kéo lớn nhất:

$$N_{AC} = N_{max} = 0,889P.$$

Thanh này chính là thanh đầu tiên đạt tới trạng thái giới hạn, lúc đó nội lực trong thanh sẽ là:

$$N_{AC} = \sigma_{ch} A = 24.15 = 360 \text{ kN}.$$

Tải trọng tương ứng với thanh AC bị chảy dẻo được xác định từ điều kiện:

$$N_{AC}^d = 0,889P = 360 \text{ kN}.$$

Do đó  $P = 405 \text{ kN}$ .

Khi thanh AC đạt tới trạng thái giới hạn, hệ vẫn còn khả năng chịu lực vì chưa trở thành một hệ biến hình. Muốn cho dàn đạt tới trạng thái giới hạn ta phải tăng tải trọng  $P$  để có thêm một thanh nữa của dàn chảy dẻo, lúc đó hệ mới trở thành biến hình và không có khả năng chịu thêm tải trọng.

Thanh bị chảy dẻo tiếp sau thanh AC là thanh có nội lực lớn nhất sau khi đã loại bỏ thanh AC và thay tác dụng của nó bằng lực dọc  $N_{AC}^d = 360$  kN. Lúc này dàn làm việc như một hệ tĩnh định chịu tải trọng  $P$  và lực  $N_{AC}^d = 360$  kN (hình 12.16e). Ta tính nội lực trong các thanh của dàn này theo phương pháp tách mắt và được kết quả như sau:

$$N_{AB} = (4P/3) - 288 \text{ kN}; \quad N_{AC} = 360 \text{ kN}; \quad N_{BC} = P - 216 \text{ kN};$$

$$N_{BD} = -(5P/3) + 360 \text{ kN}; \quad N_{CD} = -288 \text{ kN};$$

Giả thiết:

- Thanh bị chảy dẻo ngay sau thanh AC là thanh BC. Từ điều kiện chảy dẻo của thanh này ta được:

$$N_{BC} = P - 216 = \sigma_{ch}.A = 24.15 = 360 \text{ kN}. \quad \text{Suy ra } P_{gh} = 576 \text{ kN}.$$

- Thanh bị chảy dẻo ngay sau thanh AC là thanh AB, ta có:

$$N_{AB} = (20P/15) - 288 = \sigma_{ch}.A = 24.15 = 360 \text{ kN}. \quad \text{Suy ra } P_{gh} = 486 \text{ kN}.$$

- Thanh bị chảy dẻo ngay sau thanh AC là thanh chịu nén BD, ta có:

$$N_{BD} = -(5P/3) + 360 = -\sigma_{ch}.A = -24.15 = -360 \text{ kN}. \quad \text{Suy ra } P_{gh} = 432 \text{ kN}.$$

So sánh các kết quả, ta chọn giá trị  $P_{gh}$  nhỏ nhất là tải trọng giới hạn của dàn:

$$P_{gh} = 432 \text{ kN}$$

Đó là giá trị nhỏ nhất đủ để làm cho hai thanh AC và BD của dàn chảy dẻo và hệ trở thành biến hình, không có khả năng chịu thêm tải trọng (hình 12.16f).

Cần chú ý là ngoài việc xét hệ đạt tới trạng thái giới hạn, ta còn phải xét xem khi  $P_{gh} = 432$  kN thì dàn có bị mất ổn định không. Nếu dàn bị mất ổn định thì tải trọng giới hạn của dàn sẽ do điều kiện ổn định quyết định.

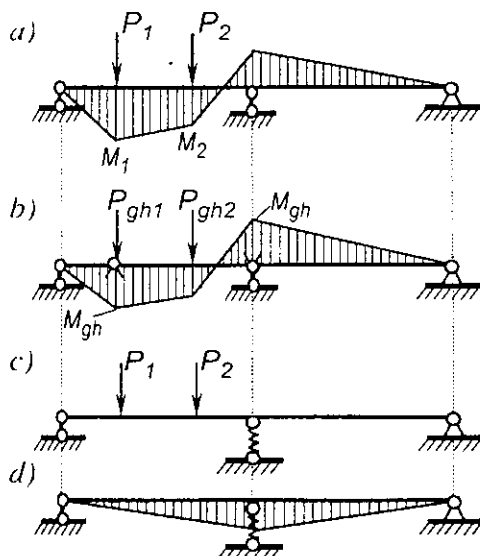
## 12.7. Ảnh hưởng của liên kết dàn hồi, sự chuyển vị cưỡng bức, sự thay đổi nhiệt độ đến giá trị của tải trọng giới hạn

Để tìm hiểu ảnh hưởng của các nguyên nhân nói trên đối với giá trị của tải trọng giới hạn, ta xét trường hợp hệ có liên kết dàn hồi làm ví dụ.

Xét dầm liên tục hai nhịp chịu tác dụng của lực  $P_1$  và  $P_2$  như trên hình 12.17a. Giả sử là ở giai đoạn dàn hồi, mômen uốn tại tiết diện dưới điểm

đặt lực  $P_1$  lớn hơn mômen uốn tại tiết diện dưới điểm đặt lực  $P_2$ . Khớp dẻo đầu tiên phát sinh tại tiết diện ứng dưới  $P_1$  còn khớp dẻo thứ hai phát sinh trên gối tựa trung gian (hình 12.17b).

Nếu gối tựa trung gian là gối đàn hồi (hình 12.17c) thì ta cần bổ sung vào biểu đồ mômen uốn của dầm trên gối cứng (hình 12.17b) phần biểu đồ mômen uốn do ảnh hưởng của liên kết đàn hồi như trên hình 12.17d. Tuy nhiên, tải trọng giới hạn vẫn không thay đổi. Thật vậy, ở trạng thái giới hạn, nhịp thứ nhất của dầm chỉ trở thành biến hình khi biểu đồ mômen uốn trong dầm đơn giản được "treo" để sao cho mômen âm lớn nhất vừa đúng bằng mômen giới hạn ở phía trên còn mômen dương lớn nhất vừa đúng bằng mômen giới hạn ở phía dưới, nghĩa là như trên hình 12.17b. Cách thực hiện này là duy nhất.



Hình 12.17

Do đó, tuy có bổ sung phần biểu đồ do ảnh hưởng của liên kết đàn hồi thì vị trí của các khớp dẻo vẫn không thay đổi. Như vậy, tải trọng giới hạn không phụ thuộc tính đàn hồi của các liên kết.

Cũng lập luận tương tự, ta chứng minh được là tải trọng giới hạn không phụ thuộc ứng suất có sẵn trong hệ siêu tĩnh cũng như không phụ thuộc ứng suất phát sinh do các nguyên nhân khác, chẳng hạn do sự thay đổi nhiệt độ, sự chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa và chế tạo không chính xác.



## CÂU HỎI ÔN TẬP

- 12.1. So sánh cách tính theo ứng suất cho phép và cách tính theo trạng thái giới hạn.
- 12.2. Cách tính theo trạng thái giới hạn được xây dựng trên cơ sở biểu đồ liên hệ giữa ứng suất và biến dạng như thế nào?
- 12.3. Nêu những điểm giống nhau và khác nhau giữa: "khớp thực" và "khớp dẻo".
- 12.4. Phát biểu tiêu chí xảy ra trạng thái giới hạn. Nêu cụ thể cho các trường hợp:
- Dầm tĩnh định.
  - Dầm siêu tĩnh một nhịp.
  - Dầm liên tục.
- 12.5. Trình bày cách tính khung siêu tĩnh theo trạng thái giới hạn.
- 12.6. Trình bày cách tính dầm siêu tĩnh theo trạng thái giới hạn.
- 12.7. Giải thích tại sao trong hệ siêu tĩnh tải trọng giới hạn không phụ thuộc tính đàn hồi của liên kết, ứng suất có sẵn, ứng suất phát sinh do sự thay đổi nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của gối tựa và chế tạo không chính xác.

## Tài liệu tham khảo chính

1. Авохин Н.Н. *Строительная механика в примерах и задачах Часть I; Часть II. Издательство Ассоциации строительных вузов, Москва, 1995.*
2. Charon P. *La méthode de Cross et le calcul pratique des constructions hyperstatiques. P. Eyrolles, 1968.*
3. Darkov A. *Structural mechanics. 4th ed. M. 1983.*
4. Kani G. *Le calcul des portiques étagés multiples. Dunod, 1958.*
5. Карамански. Т. Д. ; Рангелов Р. П. *Методично ръководство за решаване на задачи по строителна статика. Държавно издателство "Техника", София, 1971.*
6. Kiselev V. *Structural mechanics. Mir. 1982.*
7. Рабинович И. М. *Основы строительной механики стержневых систем. Стройиздат, Москва, 1956.*
8. Рабинович И. М. *Курс строительной механики стержневых систем. Часть I - Статически определимые системы. Стройиздат, Москва, 1950.*
9. Рабинович И. М. *Курс строительной механики стержневых систем. Часть II - Статически неопределимые системы. Госстройиздат, Москва, 1954.*
10. Timoshenko S. P., Young D. H. *Theory of Structures. 2nd. ed. Mc. Graw- Hill Bk. Co, 1965.*
11. *Справочник проектировщика - Расчетно - теоретический. Книга I. Стройиздат, Москва, 1950.*
12. Lêu Thọ Trình - Hồ Anh Tuấn. *Cách tính hệ siêu tĩnh theo phương pháp phân phối mômen. Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật. Hà Nội, 1965.*

13. **Lêu Thọ Trình - Hồ Anh Tuấn.** *Cơ học kết cấu - Tập I. Nhà xuất bản đại học và trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1983.*
14. **Lêu Thọ Trình.** *Cơ học kết cấu - Tập II và tập III. Nhà xuất bản đại học và trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1986.*
15. **Lêu Thọ Trình.** *Cơ học kết cấu - Tập I và Tập II - Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật. Hà Nội, 1992, 1993.*
16. **Lêu Thọ Trình.** *Cơ học kết cấu - Tập I và Tập II - Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật. Hà Nội, 2000.*

# Mục lục

## Chương 5. Phương pháp lực và cách tính hệ phẳng siêu tĩnh

5.1. Khái niệm về hệ siêu tĩnh - Bậc siêu tĩnh	3
5.2. Nội dung phương pháp lực và cách tính hệ siêu tĩnh chịu các nguyên nhân: tải trọng bất động, thay đổi nhiệt độ, cấu tạo chiều dài không chính xác, chuyển vị gối tựa	8
5.3. Áp dụng	20
5.4. Cách xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh	42
5.5. Cách kiểm tra kết quả	48
5.6. Một số điều cần chú ý khi tính các hệ siêu tĩnh bậc cao	55
5.7. Cách vận dụng tính chất đối xứng của hệ	59
5.8. Biện pháp thay đổi vị trí và phương của các ẩn	67
5.9. Cách tính dầm liên tục đặt trên các gối cứng	74
5.10. Cách tính dầm liên tục đặt trên các gối đàn hồi	95
5.11. Cách tính hệ siêu tĩnh chịu tải trọng di động	98
5.12. Biểu đồ bao nội lực trong hệ siêu tĩnh	109
Câu hỏi ôn tập	110

## Chương 6. Phương pháp chuyển vị và cách tính hệ phẳng siêu động

6.1. Khái niệm	112
6.2. Cách tính hệ siêu động chịu tải trọng bất động	117
6.3. Cách xác định chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu thanh theo phương vuông góc với trục thanh trong hệ có các thanh đứng không song song	136
6.4. Cách tính hệ siêu động chịu chuyển vị cưỡng bức, biến dạng vì nhiệt và do chế tạo không chính xác	141
6.5. Cách tính hệ có nút không chuyển vị thẳng chịu lực tập trung chỉ đặt ở nút	152

6.6. Cách tính hệ siêu động chịu tải trọng di động	153
Câu hỏi ôn tập	162
<b>Chương 7. Phương pháp hỗn hợp và phương pháp liên hợp</b>	
7.1. So sánh phương pháp lực và phương pháp chuyển vị - Cách chọn phương pháp tính	164
7.2. Phương pháp hỗn hợp	166
7.3. Phương pháp liên hợp	170
Câu hỏi ôn tập	172
<b>Chương 8. Cách tính hệ thanh không gian</b>	
8.1. Các loại liên kết không gian	173
8.2. Cách nối các vật thể thành một hệ không gian bất biến hình	177
8.3. Cách xác định phản lực và nội lực trong hệ thanh không gian tĩnh định	183
8.4. Cách phân tích dàn không gian thành những dàn phẳng	190
8.5. Cách xác định chuyển vị trong hệ thanh không gian	191
8.6. Cách tính hệ thanh không gian siêu tĩnh theo phương pháp lực	194
8.7. Cách tính hệ thanh không gian siêu động theo phương pháp chuyển vị	198
Câu hỏi ôn tập	203
<b>Chương 9. Phương pháp phân phối mômen</b>	
9.1. Phương pháp H. Cross	175
9.2. Phương pháp G. Kani	194
Câu hỏi ôn tập	210
<b>Chương 10. Phương pháp tính gần đúng</b>	
10.1. Ý nghĩa của các phương pháp tính gần đúng	245
10.2. Cách xác định sơ bộ kích thước tiết diện thanh trong khung phẳng siêu tĩnh hoặc siêu động	247
10.3. Cách tính kiểm tra gần đúng các khung phẳng nhiều tầng nhiều nhịp chịu tải trọng thẳng đứng	248

10.4. Cách tính kiểm tra gân đúng các khung phẳng nhiều tầng nhiều nhịp chịu tải trọng ngang	253
10. 5. Cách tính gân đúng các dàn siêu tĩnh	258
10. 6. Cách tính gân đúng các vòm siêu tĩnh	261
10. 7. Một số cách đơn giản hoá sơ đồ tính	262
Câu hỏi ôn tập	264
<b>Chương 11. Phương pháp động học</b>	
11.1. Khái niệm	265
11.2. Cách tính hệ thanh phẳng tĩnh định chịu tải trọng bất động	267
11.3. Điều kiện bất biến hình của hệ thanh có đủ số liên kết	278
11.4. Cách tính hệ thanh phẳng tĩnh định chịu tải trọng di động	279
11. 5. Cách tính hệ thanh siêu tĩnh	294
Câu hỏi ôn tập	298
<b>Chương 12. Khái niệm về cách tính theo trạng thái giới hạn</b>	
12.1. Khái niệm	299
12.2. Cách tính dầm tĩnh định	301
12.3. Cách tính dầm siêu tĩnh	304
12.4. Cách tính dầm có tiết diện thay đổi	309
12.5. Cách tính khung và vòm siêu tĩnh	311
12.6. Cách tính dàn siêu tĩnh	315
11.7. Ảnh hưởng của liên kết đàn hồi, sự chuyển vị cưỡng bức, sự thay đổi nhiệt độ đến giá trị của tải trọng giới hạn	317
Câu hỏi ôn tập	319
<b>Tài liệu tham khảo chính</b>	320

# CƠ HỌC KẾT CẤU

## Tập II HỆ SIÊU TĨNH

<i>Chịu trách nhiệm xuất bản :</i>	<b>PHẠM NGỌC KHÔI</b>
<i>Biên tập:</i>	<b>MINH HẰNG, THANH ĐỊNH</b>
<i>Biên tập tài bản :</i>	<b>PHƯƠNG LIÊN</b>
<i>Kỹ mỹ thuật :</i>	<b>NHƯ MAI</b>
<i>Sửa bản in :</i>	<b>THANH NGÀ</b>
<i>Trình bày bìa :</i>	<b>ĐẶNG NGUYỄN VŨ</b>

---

### NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

70 Trần Hưng Đạo, Hoàn Kiếm, Hà Nội

ĐT: P. KH-TH: 04 3942 3172; TT. Phát hành: 04 3822 0686;

Ban Biên tập: 04 3942 1132 - 04 3942 3171

FAX: 04 3822 0658 - Website: <http://www.nxbkhkt.com.vn>

Email: [nxbkhkt@hn.vnn.vn](mailto:nxbkhkt@hn.vnn.vn)

### CHI NHÁNH NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

28 Đồng Khởi - Quận 1 - TP. Hồ Chí Minh. ĐT: 08 3822 5062

---

In 600 cuốn, khổ 16 x 24 cm, tại công ty TNHH Trần Công.

Số ĐKXB: 2450 – 2014/CXB/2 – 140/KHKT.

Quyết định XB số: 188/QĐXB - NXBKHK, ngày 25/11/2014.

In xong và nộp lưu chiểu Quy IV năm 2014.









**THƯ VIỆN  
HUBT**

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ



THƯ VIỆN  
HUBT

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ



**THƯ VIỆN  
HUBT**

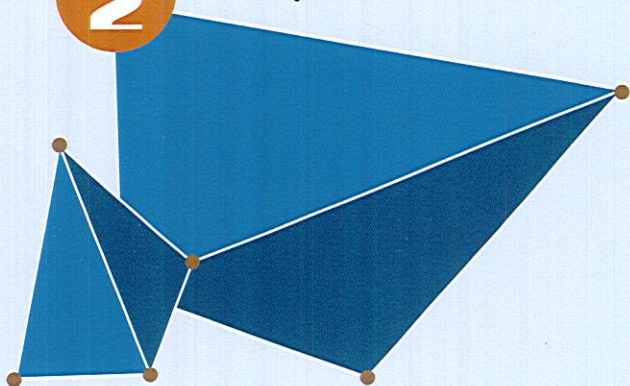
TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ



# CƠ HỌC KẾT CẤU

Tập  
**2**

## HỆ SIÊU TĨNH



TRUNG TÂM PHÁT HÀNH - NXB KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT  
70 Trần Hưng Đạo - Quận Hoàn Kiếm - Hà Nội  
Điện thoại: 04. 38220686 \* Fax: 04. 38220686

214150M02  
ISBN: 978-604-67-0405-8



9 786046 704058

Giá: 87.000 đ



THƯ VIỆN  
HUBT

TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ